

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

Бархударян Рафаел Грайрович

Ускорение сходимости разложений по собственным
функциям некоторых граничных задач

(А.01.01—математический анализ)

ДИССЕРТАЦИЯ

На соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель
Академик НАН РА А. Б. Нерсесян

Ереван - 2007

Оглавление

Используемые обозначения	4
Введение	6
0.1 Ряды Фурье: проблема сходимости	6
0.2 Метод ускорения сходимости А. Крылова	8
0.3 Метод Крылова-Экгофа-Готтлиба	11
0.4 Квазиполиномиальный метод	13
0.5 Ускорение сходимости разложений по собственным функциям	14
0.6 Основные результаты диссертации	18
1 Асимптотические свойства КЕГ и QR-методов	25
1.1 Приближенное нахождение скачков	25
1.2 Асимптотические оценки L_2 -нормы ошибки метода КЕГ	31
1.3 Асимптотические оценки L_2 -нормы ошибки метода QR	35
2 Ускорение сходимости разложений по собственным функциям некото- рых граничных задач	40
2.1 Модельная краевая задача с разрывным коэффициентом	40
2.1.1 Предварительные построения	40
2.1.2 Ускорение сходимости разложения по собственным функциям мо- дельной краевой задачи	42
2.2 Ускорение разложений по собственным вектор функциям краевой задачи для системы Дирака	46
2.2.1 Предварительные построения	46

2.2.2	Корректировка асимптотических формул для собственных значений и собственных вектор функций	49
2.2.3	Явление Гиббса для системы Дирака	52
2.2.4	Обобщение полиномиального метода для системы Дирака	57
2.2.5	Обобщение квазиполиномиального метода для системы Дирака	59
2.2.6	Численные результаты	66
	Заключение	70
	Литература	72

Используемые обозначения

$AC[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — пространство абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

$C_2^q[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — пространство q раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций с двумя компонентами.

$AC_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — пространство вектор-функций с абсолютно непрерывными компонентами на отрезке $[a, b]$:

$$AC_2[a, b] = AC[a, b] \times AC[a, b].$$

$L_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — пространство функций на отрезке $[a, b]$, суммируемых с квадратом.

$L_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \varepsilon]$ — пространство функций, для которых $\int_a^b \varepsilon(t)|f(t)|^2 dt < \infty$.

$(f, g)_\varepsilon$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[a, b, \varepsilon]$:

$$(f, g)_\varepsilon = \int_a^b \varepsilon(x) f(x) \overline{g(x)} dx.$$

$\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2[a, b]$:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$L_2^2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — пространство вектор функций с двумя компонентами из $L_2[a, b]$:

$$L_2^2[a, b] = L_2[a, b] \times L_2[a, b].$$

$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $L_2^2[a, b]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^T(x) \overline{g(x)} dx.$$

$\|\cdot\|_2$ — норма в пространстве $L_2^2[a, b]$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b (|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2) dt \right)^{1/2}, \quad f = (f_1, f_2)^T.$$

$\mathbf{S}_N(\mathbf{f})$ — частичная сумма ряда Фурье функции f .

$\mathbf{R}_N(\mathbf{f})$ — ошибка при приближении функции f частичным рядом Фурье.

$\mathbf{S}_{q,N}(\mathbf{f})$ — приближение функции f методом Крылова-Ланцоша.

$\mathbf{R}_{q,N}(\mathbf{f})$ — ошибка приближения $\mathbf{S}_{q,N}(\mathbf{f})$.

$\mathbf{S}_{m,q,N}(\mathbf{f})$ — приближение функции f квазиполиномиальным методом.

$\mathbf{R}_{m,q,N}(\mathbf{f})$ — ошибка приближения $\mathbf{S}_{m,q,N}(\mathbf{f})$.

$\tilde{\mathbf{S}}_{q,N}(\mathbf{f})$ — приближение функции f КЕГ-методом.

$\tilde{\mathbf{R}}_{q,N}(\mathbf{f})$ — ошибка приближения $\tilde{\mathbf{S}}_{q,N}(\mathbf{f})$.

$\tilde{\mathbf{S}}_{m,q,N}(\mathbf{f})$ — приближение функции f квазиполиномиальным методом с приближенным определением скачков.

$\tilde{\mathbf{R}}_{m,q,N}(\mathbf{f})$ — ошибка приближения $\tilde{\mathbf{S}}_{m,q,N}(\mathbf{f})$.

Введение

0.1 Ряды Фурье: проблема сходимости

В 1807 г. Жак Фурье высказал идею о разложении функции в тригонометрический ряд. Это было одним из величайших научных открытий, которое в дальнейшем оказало влияние на развитие многих ветвей естествознания. И, как это часто бывает, оно было неоднозначно воспринято в научном мире даже среди математиков. В 1824 г. Ж. Фурье развеял все сомнения относительно этого явления, показав (в рамках принятой тогда строгости), что "любая" заданная на конечном отрезке функция разлагается в тригонометрический ряд, именуемый ныне рядом Фурье. В комплексной записи, при разложении функции f на отрезке $[-1, 1]$, этот ряд представляется в виде

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\pi n x}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (0.1)$$

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\pi n t} dt. \quad (0.2)$$

Для любой функции $f \in L_2[-1, 1]$ он сходится к f в метрике $L_2[-1, 1]$. Известны также критерии его точечной сходимости в разных классах функций (см., например, [1]).

Хотя этот метод уже два столетия является одним из известнейших аппаратов науки, прикладная эффективность его использования в прошлом часто оказывалась ограниченной. Дело в том, что на практике приходится ограничиваться конечным числом коэффициентов Фурье и вычислять значения "урезанного" ряда

$$f(x) \sim S_N(f) = S_N(f, x) = \sum_{n=-N}^N f_n e^{i\pi n x}. \quad (0.3)$$

В связи с этим еще в 1848 г. Генри Вибрахам (Henry Wilbraham) опубликовал работу, в которой отметил и проанализировал явление, суть которого для простейшей

разлагаемой функции $f(x) = x$ проиллюстрируем на рис. 1.

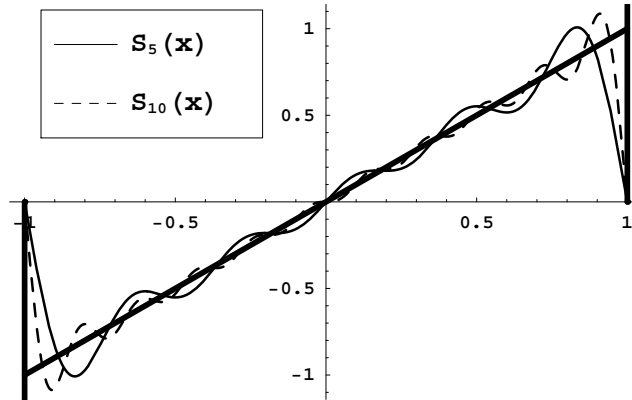


Рис. 1: График $S_N(f)$ для функции $f(x) = x$ при $N = 5$ (сплошная линия), $N = 10$ (пунктир) и его "предела" при $N \rightarrow \infty$ (жирная линия)

В 1898 г. Альберт Майкельсон (Albert Michelson) даже сконструировал механизм, который воспроизводил график урезанного ряда Фурье функции, заданной в виде прямоугольного импульса. В точках разрыва ясно просматривалось описанное явление.

В 1899 г. Уиллард Гиббс (J. Willard Gibbs) охарактеризовал это явление как математическое, характерное для всех точек скачков разлагаемой в ряд Фурье кусочно-непрерывной функции.

Наконец, в 1906 г. Максим Бёчер (Maxime Bôcher) дал детальный математический анализ этому явлению, назвав его явлением Гиббса, что и утвердилось в научной литературе.

В современной трактовке явление Гиббса для ряда Фурье определяется следующим образом. Предположим, что кусочно-непрерывная с ограниченным изменением функция f имеет разрыв первого рода в точке $x_0 \in [-1, 1]$. Тогда справедлива формула

$$\limsup_{\substack{N \rightarrow \infty, \\ x \rightarrow x_0 \pm 0}} \frac{|S_N(f, x) - A|}{|f(x_0 \pm 0) - A|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

где $A = (f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) / 2$, а точки $x = \pm 1$ отождествляются. Число, стоящее справа (величина явления Гиббса), равно примерно 1.179.

Таким образом, оказалось, что аппроксимация гладкой на конечном отрезке $[-1, 1]$

функции f частичным рядом Фурье (0.3) мало эффективна, если разлагаемая функция, продолженная 2-периодически на всю числовую ось, не обладает достаточной гладкостью. Это прежде всего относится к кусочно-гладким функциям, ряд Фурье которых (при наличии хотя бы одной точки разрыва) не может сходиться равномерно в силу малой скорости убывания его коэффициентов.

Само явление Гиббса может быть устранено применением (вместо $f_N(x)$) таких методов суммирования, как методы Фейера или Рисса (см. [1]). Современные вейвлет-преобразования на основе базиса Хаара также обладают таким свойством (см. [2]). Однако, с точки зрения скорости восстановления функции $f(x)$ на основе первых $2N + 1$ коэффициентов Фурье f_n , $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, при $N \rightarrow \infty$, эти подходы также мало эффективны.

0.2 Метод ускорения сходимости А. Крылова

В 1905 г. русский математик и кораблестроитель А. Н. Крылов [3] предложил оригинальный подход для существенного ускорения сходимости ряда Фурье и соответствующего устранения явления Гиббса для кусочно-гладких функций.

Приведем схему его рассуждений, сохранив обозначения оригинала.

Рассматривается разложение функции $f(x)$, заданной от 0 до 2π , в ряд эквивалентного вида

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где коэффициенты a_n, b_n выражаются формулами

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt,$$

и

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Предположим, что функция $f(x)$ конечна на этом промежутке и что этот промежу-

ток может быть разделен на конечное число $p + 1$ частных промежутков

$$[0, 2\pi] = [0, k_1] \cup [k_1, k_2] \dots [k_p, 2\pi],$$

в каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна со своими производными и имеет односторонние производные в точках $0 \leq k_1 \leq k_2 \dots \leq k_p \leq 2\pi$. Интегрируя по частям, легко придти к формулам

$$\pi a_n = \frac{A}{n} + \frac{\pi b'_n}{n},$$

где

$$A = \sin nk_1 [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] + \\ \sin nk_2 [f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)] + \dots + \sin nk_p [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)].$$

Аналогично получим, что

$$\pi b_n = \frac{B}{n} + \frac{\pi a'_n}{n},$$

где

$$B = f(+0) - \cos nk_1 [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] - \\ \cos nk_2 [f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)] - \dots - f(2\pi - 0).$$

В вышеуказанных формулах a'_n и b'_n коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Продолжая таким же образом будем иметь

$$\pi a'_n = \frac{A'}{n} + \frac{\pi b''_n}{n}, \quad \pi b'_n = \frac{B'}{n} + \frac{\pi a''_n}{n}.$$

Константы A', B' нетрудно выписать явно через скачки $f'(x)$. Таким образом, получим

$$\pi a_n = \frac{A}{n} - \frac{B'}{n^2} - \frac{\pi a''_n}{n^2}, \\ \pi b_n = \frac{B}{n} + \frac{A'}{n^2} - \frac{\pi b''_n}{n^2},$$

следовательно, чтобы ряд Фурье был абсолютно сходящимся, надо, чтобы при всяком n было $A = 0, B = 0$.

Полученные выражения показывают, что коэффициенты при $\frac{1}{n}$ зависят только от величины скачков функции $f(x)$ и поэтому, если функцию $f(x)$ представить в виде

$$f(x) = F(x) + \varphi(x)$$

и выбрать функцию $F(x)$ так, чтобы она имела те же скачки, что и $f(x)$, то разность $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ представится рядом Фурье, порядок убывания коэффициентов которого будут не ниже второго.

Оказывается, что выбор функции $F(x)$ возможно всегда выполнить таким образом, чтобы остаток $\varphi(x)$ представился рядом Фурье, коэффициенты которого будут сколь угодно высокого порядка относительно $\frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, совершенно аналогично предыдущему представим $\varphi'(x) = \psi_1(x) + \omega_1(x)$, так чтобы $\psi_1(x)$ имела те же места разрыва и те же самые скачки. Имеем

$$\varphi(x) = \int \psi_1(x)dx + \int \omega_1(x)dx.$$

Пологая $F_1(x) = \int \psi_1(x)dx$ и $\varphi_1(x) = \int \omega_1(x)dx$ получим равенство

$$f(x) = F(x) + F_1(x) + \varphi_1(x),$$

ряд, представляющий функцию $\varphi(x)$, будет иметь коэффициенты третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$. Если выбрать функции F и ψ_1 кусочно-линейными, то разрывная функция $F(x) + F_1(x)$ будет состоять из прямолинейных отрезков и отрезков парабол.

Продолжая таким образом, можем, очевидно, дойти до точности любого порядка n^{-k} , $k \geq 1$, $n \rightarrow \infty$, если того позволяет гладкость функции $f(x)$.

Нетрудно усмотреть, что здесь изложен так называемый "метод полиномов Бернулли" (метод Бернулли, полиномиальный метод), систематическому изучению которого, спустя почти 60 лет, посвятил свои известные работы К. Ланцош (см. [4, 5, 6], а также

[7, 8, 9]), по-видимому, не знакомый с исследованиями А. Крылова. Этот подход будем называть также методом Крылова-Ланцоша.

0.3 Метод Крылова-Экгофа-Готтлиба

Приведем схему метода Бернулли в современном виде. Для $f \in C^q[-1, 1]$ обозначим

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \dots, q.$$

Если $k < 0$, то примем $A_k(f) = 0$.

Легко усмотреть, что

Лемма 0.1 Пусть $f \in C^{q-1}[-1, 1]$ и $f^{(q-1)} \in AC[-1, 1]$. Для $n \neq 0$ имеет место представление

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^1 f^{(q)}(t) e^{-i\pi n t} dt. \quad (0.4)$$

Формула (0.1) позволяет представить функцию f в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q-1} A_k B_k(x) + w(x), \quad (0.5)$$

где $w(x)$ некоторая $q - 1$ раза непрерывно дифференцируемая на R и 2-периодическая функция, а $B_k(x)$ - полиномы Бернулли, коэффициенты Фурье которых имеют вид

$$B_{k,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & n = 0, \end{cases} \quad k = 0, \dots, q,$$

а сами они определяются следующей рекуррентной формулой

$$B_0(x) = \frac{x}{2}, \quad B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \quad x \in [-1, 1], \quad k = 1, 2, \dots,$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^1 B_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты Фурье функции $w(x)$ определяются по формулам

$$w_n = f_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k B_{k,n}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (0.6)$$

Из (0.5) приходим к следующей аппроксимационной формуле для f :

$$S_{q,N}(f) = \sum_{n=-N}^N \left(f_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_{k,n} \right) e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x), \quad (0.7)$$

которая имеет скорость точечной сходимости порядка $O(N^{-q})$ при $N \rightarrow \infty$.

В работе [10] была получена следующая асимптотическая оценка точности метода Крылова-Ланцоша.

Теорема 0.1 Пусть $f \in C^q[-1, 1]$ при $q \geq 0$ и $f^{(q)} \in AC[-1, 1]$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|f - S_{q,N}(f)\| = |A_q(f)| d_1(q),$$

$$d_1(q) = \frac{1}{\pi^{q+1} \sqrt{2q+1}}. \quad (0.8)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу. Известно только несколько первых коэффициентов Фурье f_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, функции $f(x)$. Нужно как можно точнее восстановить функцию $f(x)$ и точки ее скачков. Как мы уже видели, прямое представление $S_N(f)$ неэффективно в случае когда $f(x)$ имеет точку разрыва или не является 2-периодической функций. Метод Крылова-Ланцоша, описанный выше, эффективен, однако предполагает, что известны значения скачков $A_k(f)$ искомой функции $f(x)$.

Практические алгоритмы решения этой задачи были разработаны в последние 20 лет, в основном, в работах К. Экгофа и Д. Готлиба с соавторами [11]-[24].

Суть этого подхода состоит в следующем.

Будем предполагать, что разлагаемая функция $f(x)$ из класса $C^q[-1, 1]$, однако $f(x)$ не продолжается 2-периодически на всю вещественную ось. Используя представление f_n из леммы 0.1, имеем

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + F_n.$$

Так как $F_n = o(n^{-q-1})$ при $n \rightarrow \infty$, приближенные значения $\tilde{A}_k(f)$ можно найти, решая следующую систему уравнений при достаточно больших N

$$f_n = \sum_{k=0}^{q-1} \tilde{A}_k(f) \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, \quad n = n_1, n_2, \dots, n_q. \quad (0.9)$$

где $\{n_k\}$ - различные целые числа, $|n_k| \leq N$, $n_k = O(N)$, $N \rightarrow \infty$.

Этот метод нахождения приближенных скачков и последующая аппроксимация функции $f(x)$ будем называть КЕГ-методом (методом Крылова-Экгофа-Готтлиба).

0.4 Квазиполиномиальный метод

В работе А. Нерсеяна [25] (см. также [10],[26]-[29]) разработан другой метод ускорения сходимости разложения (0.3), основанный на применении аппроксимантов Паде [30] к асимптотическому разложению коэффициентов Фурье (0.4), с предварительным вышеприведенным способом приближенного определения скачков. Результатом такого подхода явился квазиполиномиальный метод (QP-метод).

Переходя к его краткому описанию, рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\theta = \{\theta_k\}_{k=1}^p$, $p \geq 1$ и обозначим

$$\Delta_k^0(\theta) = A_k, \quad \Delta_k^s = \Delta_k^{s-1}(\theta) + \theta_s \Delta_{k-1}^{s-1}(\theta), \quad k \geq 1. \quad (0.10)$$

Если $k < 0$, то примем $\Delta_k^s(\theta) = 0$. Следуя работам [25, 26], рассмотрим следующее квазиполиномиальное представление для $f \in C^q[-1, 1]$

$$S_{m,q,N}(f) = Q(x) + S_N(P), \quad (0.11)$$

где

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{i\pi n x}, \quad P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\pi n x}, \quad (0.12)$$

а коэффициенты Фурье определены, как

$$Q_n = \frac{(-1)^{n+1} (i\pi n)^m}{2 \prod_{s=1}^m (i\pi n + \theta_s)} \sum_{k=0}^{q-m-1} \frac{\Delta_k^m(\theta)}{(i\pi n)^{k+1}}, \quad (0.13)$$

$$P_n = f_n - Q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \sum_{k=1}^m \frac{\theta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\theta) (i\pi n)^k}{\prod_{s=1}^k (i\pi n + \theta_s)} + \frac{(-1)^{n+1} (i\pi n)^m}{2 \prod_{k=1}^m (i\pi n + \theta_k)} \sum_{k=q-m}^{q-1} \frac{\Delta_k^m(\theta)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^1 f^{(q)}(t) e^{-i\pi n t} dt \quad (0.14)$$

для $n \neq 0$. Численные значения параметров θ_k определим из системы

$$\Delta_k^m(\theta) = 0, \quad k = q - m, \dots, q - 1. \quad (0.15)$$

Пусть U_r^m обозначает матрицу $(A_{k-s+r})_{k,s=1}^m$. Из результатов работы [26] можно получить следующую теорему.

Теорема 0.2 Пусть $0 \leq m \leq q-1$, $f \in C^q[-1, 1]$ и $f^{(q)} \in AC[-1, 1]$. Если $\det U_{q-m-1}^m \neq 0$, то для последовательности $\{\theta\}$, определенной из системы (0.15), имеет место оценка

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|f - S_{m,q,N}(f)\| = h_{1,m}(q), \quad h_{1,m}(q) = \left| \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m} \right| d_1(q),$$

где $d_1(q)$ определена в (0.8).

Сравнив формулы $S_{q,N}$ и $S_{m,q,N}$, мы видим, что, – при использовании тех же скачков $\{A_k\}_{k=1}^q$, – порядок сходимости к f одинаков. Однако применение предлагаемой нелинейной аппроксимации потенциально предпочтительней по той простой причине, что она точная (при достаточно больших m и точном определении скачков) для квазиполиномов, в то время, как метод Бернулли точен только для полиномов. Важно отметить, что в случае $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = 0$ (или, формально, при $m = 0$) метод QR совпадает с последним.

0.5 Ускорение сходимости разложений по собственным функциям

Общеизвестна теоретическая и прикладная роль разложений по собственным функциям граничных задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Сама система Фурье $\{e^{i\pi nx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $-1 \leq x \leq 1$, также может быть трактована, как система собственных функций самосопряженной задачи

$$i y'(x) = \lambda y(x), \quad y(-1) = y(1).$$

В общем же случае, в плане ускорения сходимости, в работе [27] рассмотрена задача на собственные значения

$$L y = \lambda y, \quad L y = \sum_{s=0}^m p_s(x) y^{(s)}(x), \quad m \geq 1, \quad (0.16)$$

с регулярными нормированными граничными условиями

$$U_\mu y = \sum_{s=0}^{m-1} (\alpha_s^\mu y^{(s)}(a) + \beta_s^\mu y^{(s)}(b)) = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m, \quad (0.17)$$

где (a, b) – конечный интервал, $p_m(x) \equiv 1$, $p_s(x) \in C^{s+m(q-1)}[a, b]$ – комплекснозначные функции и $\{\alpha_s^\mu\}$, $\{\beta_s^\mu\}$ – комплексные постоянные ($q \geq 1$, $s = 0, 1, \dots, (m-1)$, $\mu = 1, 2, \dots, m$).

Сопряженная задача для уравнения

$$L^* z = \sum_{s=0}^m (-1)^s (z(x) \overline{p_s(x)})^{(s)} = \bar{\lambda} z$$

имеет аналогичный вид.

Обозначим через $\{\lambda_n\}$ бесконечное множество собственных значений задачи (0.16)-(0.17), пронумерованных в порядке возрастания их модуля. При четном m удобно считать $1 \leq n \leq \infty$, а при нечетном — $-\infty \leq n \leq \infty$. Соответствующая нормированная система собственных и присоединенных функций

$$\{\phi_n(x), \psi_n(x)\}, \quad L \phi_n = \lambda_n \phi_n, \quad L^* \psi_n = \bar{\lambda}_n \psi_n, \quad (0.18)$$

биортогональна и полна в пространстве $L_2[a, b]$.

В указанных выше условиях формальный ряд

$$\sum_{\forall n} f_n \phi_n(x), \quad f_n = \int_a^b f(t) \overline{\psi_n(t)} dt \quad (0.19)$$

сходится к кусочно-гладкой функции $f(x)$ с скачками в точках $\{x_k\}$ поточечно при $x \in (a, b)$, $x \notin \{x_k\}$, однако, вообще говоря, в L_2 -метрике он сходится медленно. Как и в случае классического ряда Фурье, в окрестностях точек $\{x_k\}$ наблюдается явление Гиббса.

Как правило (см., например, [31]-[35]), общие критерии разложимости функций в ряды по собственным функциям таких задач относятся или к установлению полноты в соответствующих (возможно, весовых) пространствах, или к утверждениям о равносходимости с рядами Фурье. Равномерная же сходимость обычно бывает связана с разложениями функций из области определения соответствующего оператора. Однако, с точки зрения приложений, даже равномерная сходимость сама по себе мало эффективна: решающую роль играет скорость сходимости.

В работе [36] метод Крылова-Ланцоша, описанный в предыдущем разделе, распространен для разложений по системе собственных функций задачи (0.16)-(0.17) в самосопряженном случае. Более общий и практически эффективный результат получен в работе [27] (см. также [37]), в которой обобщен QR-метод на общую задачу (0.16)-(0.17). Приведем краткое описание соответствующего подхода.

Оператор $Ly - \lambda y$, $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, с условиями (0.17) обращается с помощью мероморфной по λ функции Грина $G(x, t, \lambda)$. Для простоты будем предполагать, что ее полюсы в λ -плоскости (совпадающие с собственными значениями $\{\lambda_n\}$) простые. Не умаляя общности, можно считать, что нуль не является собственным значением. Ключевую роль в методе играет известная формула

$$G(x, t, \lambda) = \sum_{\forall n} \frac{\phi_n(x) \overline{\psi_n(t)}}{\lambda_n - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \{\lambda_n\}. \quad (0.20)$$

С другой стороны, функция Грина $G(\xi, x, z)$ может быть представлена в явной форме через фундаментальную систему решений однородного уравнения $Ly - \lambda y = 0$ (см. [31], гл.1, §3).

Пусть теперь $f = f(x)$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-1, 1]$ функция, с точками

"склеивания" $a = x_1 < x_2 < \dots < x_l = b$, $2 \leq l < \infty$, и $f \in C^{qm}$, $q \geq 1$, на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, l-1$.

Применим аппроксимацию Паде к следующему асимптотическому по степеням $1/\lambda_n$ ряду коэффициента f_n при $n \rightarrow \infty$ (L^0 -тождественный оператор):

$$f_n = \sum_{k=1}^l \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\psi_n^{(r)}(x_k)}{\lambda_n^{-s}} \sum_{s=0}^q \lambda_n^{-s} A_{skr} + O(\lambda_n^{-q-1}), \quad A_{skr} = \Delta_k(\ell_r L^s f(x)), \quad (0.21)$$

где $\{\ell_r\}$ – определенные дифференциальные операторы и

$$\Delta_k(g(x)) = \begin{cases} g(x_k) & \text{при } k = 1, l; \\ g(x_k - 0) - g(x_k + 0) & \text{при } k \neq 1, l; \end{cases}$$

Величины $\{A_{skr}\}$ естественно называть скачками функции $f(x)$. В работе [27] они приближенно находились из линейной системы, получаемой из (0.21) отбрасыванием члена $O(\lambda_n^{-q-1})$ и подбором различных значений $\{n_s\}$, удовлетворяющий неравенствам $\delta N \leq |n_1| \leq |n_2| < \dots \leq |n_t| \leq N$, $0 < \delta < 1$, $t = mql$.

В результате получим

$$\sum_{s=0}^q A_{skr} \lambda_n^{-s} = \frac{P_Q^{kr}(z)}{\prod_{j=1}^M (z - a_{jkr})} + O(z^{q+1}) = \frac{\lambda_n^{M-Q} R_Q^{kr}(\lambda_n)}{\prod_{j=1}^M (\lambda_n - \alpha_{jkr})} + O(\lambda_n^{-q-1}), \quad n \rightarrow \infty \quad (0.22)$$

где $z = \lambda_n^{-1}$, $P_Q^{kr}(z)$ и $R_Q^{kr}(\lambda_n)$ -многочлены (от z и λ_n соответственно) степени, не выше Q , $\{a_{jkr}\}$ - нули знаменателя аппроксиманта Паде (для простоты предполагается, что они отличны от нуля), $\{\alpha_{jkr}\}$ – возникающие при этом (необязательно разные) постоянные ($k = 1, \dots, l$; $r = 0, 1, \dots, m-1$).

Разложив рациональную относительно λ_n функцию в правой части формулы (0.22) на простые дроби, нетрудно убедиться, что функция

$$\varphi^q(x) = \sum_{\forall n} \Phi_n^q \phi_n(x), \quad \Phi_n^q = \sum_{k=1}^l \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\psi_n^{(r)}(x_k)}{\prod_{j=1}^M (\lambda_n - \alpha_{jkr})} \frac{\lambda_n^{M-Q} R_Q^{kr}(\lambda_n)}{\prod_{j=1}^M (\lambda_n - \alpha_{jkr})}$$

является линейной комбинацией значений $\left\{ \frac{\partial^{p+i-1}}{\partial t^p \partial \lambda^{i-1}} G_{sr}(x, x_k, \alpha_{jkr}) \right\}$.

В результате придем к следующей схеме ускорения сходимости

$$\tilde{g}_N(x) = \tilde{\varphi}^q(x) + \sum_{|\lambda_n| \leq N^m} (f_n - \tilde{\Phi}_n^q) \phi_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

аналогичной QR-методу в случае ряда Фурье.

0.6 Основные результаты диссертации

Представленная работа посвящена уточнению и развитию некоторых из вышеприведенных результатов. Приведем краткий обзор ее содержания.

0.6.1. Первая глава диссертации посвящена оценке ошибки при приближенном определении скачков $\{\tilde{A}_k\}$ в методах КЕГ и QR. В работах Экгофа [11]-[14] для этих скачков была дана (без доказательств) лишь асимптотическая оценка вида $\tilde{A}_k = A_k + O(N^{k-q+1})$.

В данной же работе получены не только точные оценки ошибок, но и выявлено асимптотическое поведение ошибки приближений методами КЕГ и QR в терминах скачков $\{A_k\}$ (см. [38]), в зависимости от индексов $\{n_k\}$ в системе (0.9).

Теорема 1.1 Пусть $q \geq 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ выбраны так, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0, \quad s = 1, \dots, q, \quad (0.23)$$

и пусть α – наибольшая кратность элементов в последовательности c_1, c_2, \dots, c_q .

Тогда, если $f \in C^{q+\alpha-1}[-1, 1]$ и $f^{(q+\alpha-1)} \in AC[-1, 1]$, то имеет место оценка

$$\tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + o(N^{-q+j}), \quad N \rightarrow \infty, \quad j = 0, \dots, q-1, \quad (0.24)$$

где константы χ_j суть коэффициенты полинома

$$\prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right) = \sum_{s=0}^q \chi_s x^s.$$

Теорема 1.5 Пусть $q \geq 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ в (0.9) выбраны так, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0, \quad s = 1, \dots, q,$$

и пусть α – наибольшая кратность элементов в последовательности c_1, c_2, \dots, c_q .

Тогда, для $f \in C^{q+\alpha-1}[-1, 1]$ и $f^{(q+\alpha-1)} \in AC[-1, 1]$ имеет место следующая оценка:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{q,N}(f)\| = |A_q(f)| d_2(q), \quad (0.25)$$

где

$$d_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^1 \prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (0.26)$$

Пусть теперь если индексы n_s удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} -N \leq n_s \leq -N + c, \quad s = 1, \dots, m, \\ N - c \leq n_s \leq N, \quad s = m + 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (0.27)$$

где c – фиксированная константа, получим асимптотическую константу

$$d_5(q) = \begin{cases} \frac{2^q q!}{\pi^{q+1}} \frac{1}{\sqrt{(2q+1)!}}, & q = 2m, \\ \frac{2^q q!}{\pi^{q+1}} \frac{\sqrt{q+1}}{\sqrt{q(2q+1)!}}, & q = 2m + 1. \end{cases} \quad (0.28)$$

Во втором разделе главы 1 показано, что такой выбор индексов n_s (0.27) оптимален в смысле L_2 - нормы.

Теорема 1.7 *Предположим, что $f \in C^{2q-1}[-1, 1]$, $f^{(2q)} \in AC[-1, 1]$ для фиксированного $q \geq 1$. Пусть выбор $n_s = n_s(N)$ удовлетворяет условиям*

$$\alpha N \leq |n_s| \leq N, \quad s = 1, \dots, q. \quad (0.29)$$

Тогда верна следующая оценка:

$$\|\tilde{R}_{q,N}(f)\| = O(N^{-q-1/2}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (0.30)$$

С другой стороны,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} N^{q+1/2} \|\tilde{R}_{q,N}(f)\| \geq |A_q(f)| d_5(q). \quad (0.31)$$

В ряде случаев исследовано асимптотическое поведение метода QR с использованием приближенных значений $\{\tilde{A}_k\}$ скачков.

Теорема 1.8 *Пусть $q \geq 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ выбраны так, что*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0, \quad s = 1, \dots, q, \quad (0.32)$$

и пусть α - наибольшая кратность элементов в последовательности c_1, c_2, \dots, c_q и $A_{q-2}(f) \neq 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{1,q,N}(f)\| = h_2(q), \quad (0.33)$$

$$h_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^{q+1}}} \left(\int_{-1}^1 \left| A_q(f) \prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right) - \frac{A_{q-1}(f)^2}{A_{q-2}(f)} x^q \right|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (0.34)$$

0.6.2. Вторая глава диссертации посвящена разработке конструктивных методов ускорения разложений по собственным функциям некоторых граничных задач.

В первом разделе главы 2 рассмотрена модельная краевая задача с разрывным коэффициентом (см. [39, 40]). Этот пример призван показать, что методы КЕГ и QR работают и в случае кусочно-гладких коэффициентов дифференциального оператора или (в зависимости от трактовки) в весовых пространствах с кусочно-гладким весом.

Второй раздел главы 2 занимает центральное место в диссертации. Здесь рассмотрена следующая краевая задача для одномерной системы Дирака (см. [41, 42]):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix} y = \lambda y, \quad (0.35)$$

$$y_1(-1) \sin \alpha + y_2(-1) \cos \alpha = 0, \quad (0.36)$$

$$y_1(1) \sin \beta + y_2(1) \cos \beta = 0, \quad (0.37)$$

где p_{ij} - вещественные функции, определенные и имеющие непрерывную производную на отрезке $[-1, 1]$, $p_{12} = p_{21}$, $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$.

Система дифференциальных уравнений Дирака имеет важную теоретическую и прикладную ценность. Часто, в теоретической физике она часто фигурирует, когда надо разлагать заданную функцию по собственным функциям разных краевых задач. Свойства разложений по собственным функциям этой задачи исследованы рядом физиков и математиков (см. [43]-[49] с цитированной литературой). Проблемы такого рода представляют не только академический интерес, но и встречаются в таких приложениях,

как квантовая механика, в теории R-матриц для частиц Дирака, при математическом моделировании одномерных магнитогидродинамических явлений [50]-[55].

Однако, насколько нам известно, вопросы ускорения разложений по соответствующим собственным функциям нигде не исследовались. Решение же этой проблемы не следует из результатов раздела 0.5, поскольку, во первых, система Дирака не сводится к одному уравнению высокого порядка и, во вторых, здесь функция Грина является матрицей - функцией. Хотя и здесь реализуются идеи раздела 0.5, приведенные и другие обстоятельства требуют специального подхода к исследуемой проблеме, основанного на результатах спектральной теории одномерного уравнения Дирака, которая построена, в основном, после 1950г. в работах [56, 57].

Не умаляя общности, рассмотрим канонический вид уравнения Дирака

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y, x \in [-1, 1] \quad (0.38)$$

с краевыми условиями (0.36)-(0.37). Пусть $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ собственные значения, а $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ нормированные собственные вектор-функции этой задачи.

Введем обозначения

$$D_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n v_n(x), \quad c_n = \int_{-1}^1 v_n^T(x) f(x) dx,$$

$$DR_N(f) = f(x) - D_N(f),$$

$$Lf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{df}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} f,$$

$$Bf = B \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_k(x) = BL^k f(x), \quad k \geq 0.$$

Лемма 2.4 Пусть $q \geq 1$ и $f \in C_2^q[-1, 1]$. Тогда для коэффициентов c_n имеет место следующее представление:

$$c_n = P_n + F_n, \quad (0.39)$$

где

$$P_n = v_n^T(1) \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_n^{-k-1} \tilde{f}_k(1) - v_n^T(-1) \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_n^{-k-1} \tilde{f}_k(-1) \quad (0.40)$$

$$F_n = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 v_n^T(x) L^q(f(x)) dx. \quad (0.41)$$

Кроме этого

$$F_n = o(n^{-q}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (0.42)$$

Используя Лемму 2.4, представим f функцию в виде

$$f(x) = F(x) + P(x),$$

где $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n v_n(x)$, $P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n v_n(x)$. Отсюда получим следующую формулу ускорения сходимости (метод КЕГ-Д)

$$D_{q,N}(f) = D_N(F) + \sum_{k=0}^{q-1} \left(G_k(x, 1, 0) \tilde{f}_k(1) - G_k(x, -1, 0) \tilde{f}_k(-1) \right), \quad (0.43)$$

где

$$G_k(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{k!} \frac{d^k G(x, \xi, \lambda)}{d\lambda^k}, \quad k \geq 0, \quad (0.44)$$

а $G(x, \xi, \lambda)$ – матрица-функция Грина.

Обозначим теперь $DR_{q,N}(f) = f(x) - D_{q,N}(f)$.

Теорема 2.3 Пусть $q \geq 1$, $p, r \in C^{q-1}[-1, 1]$, $p^{(q-1)}, r^{(q-1)} \in AC[-1, 1]$, $f \in C_2^q[-1, 1]$ и $f^{(q)} \in AC_2[-1, 1]$. Тогда

$$DR_{q,N}(f) = o(N^{-q}), \quad N \rightarrow \infty \quad (0.45)$$

равномерно на $[-1, 1]$.

Теорема 2.4 Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+1/2} \|DR_{q,N}(f)\|_2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{q+1} \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{2q+1}}, \quad (0.46)$$

где

$$C_1 = \tilde{f}_{q,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{q,2}(1) \sin \beta,$$

$$C_2 = \tilde{f}_{q,2}(-1) \cos \alpha - \tilde{f}_{q,1}(-1) \sin \alpha.$$

Для дальнейшего ускорения сходимости разложения по собственным вектор функциям задачи Дирака заметим, что коэффициент P_n является, с точностью до множителя, отрезком степенного ряда относительно переменной $x = \lambda_n^{-1}$. Следовательно он может быть заменен аппроксимантом Паде. Для этого рассмотрим конечные последовательности комплексных чисел $\eta = \{\eta_k\}_{k=1}^m$, $\theta = \{\theta_k\}_{k=1}^m$ и введем обозначения

$$\Delta_n^0(\eta, A) = A_n(f), \quad (0.47)$$

$$\Delta_n^k(\eta, A) = \Delta_n^{k-1}(\eta, A) + \eta_k \Delta_n^{k-1}(\eta, A), \quad (0.48)$$

$$\Delta_n^0(\theta, B) = B_n(f), \quad (0.49)$$

$$\Delta_n^k(\theta, B) = \Delta_n^{k-1}(\theta, B) + \theta_k \Delta_n^{k-1}(\theta, B). \quad (0.50)$$

где $A_k = \tilde{f}_{k,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{k,2}(1) \sin \beta$, $B_k = \tilde{f}_{k,1}(-1) \cos \alpha - \tilde{f}_{k,2}(-1) \sin \alpha$.

Лемма 2.7 Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и $q - 1 \geq m \geq 1$. Тогда для коэффициентов c_n , определенных в (2.17), имеет место следующее представление:

$$c_n = Q_n + H_n,$$

где

$$Q_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos \beta} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_n^{m-k-1} \Delta_k^m(\eta, A)}{\prod_{s=1}^m (\lambda_n + \eta_s)} - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos \alpha} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_n^{m-k-1} \Delta_k^m(\theta, B)}{\prod_{s=1}^m (\lambda_n + \theta_s)}, \quad (0.51)$$

$$H_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos \beta \lambda_n^{q+1}} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_n^k \eta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\eta, A)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \eta_s)} - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos \alpha \lambda_n^{q+1}} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_n^k \theta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\theta, B)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \theta_s)} + F_n, \quad (0.52)$$

$$F_n = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 v_n^T(x) L^q(f(x)) dx.$$

Теперь для данной функции $f \in C_2^q[-1, 1]$ имеем $f(x) = Q(x) + H(x)$, где

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n v_n(x), \quad H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n v_n(x).$$

Отсюда получим формулу ускорения сходимости (метод QP-D)

$$D_{m,q,N}(f) = Q(x) + \sum_{n=-N}^N H_n v_n(x). \quad (0.53)$$

$$DR_{m,q,N}(f) = f(x) - D_{m,q,N}.$$

Последовательности η и θ определим из систем

$$\Delta_k^m(\eta, A) = 0, \quad k = q - m, \dots, q - 1, \quad (0.54)$$

$$\Delta_k^m(\theta, B) = 0, \quad k = q - m, \dots, q - 1. \quad (0.55)$$

Теорема 2.6 Пусть выполнены условия теоремы 2.3, $q - 1 \geq m \geq 1$ и последовательности θ, η удовлетворяют равенствам (0.54) и (0.55). Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+1/2} \|DR_{m,q,N}(f)\|_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q+1} \sqrt{\frac{C_3^2 + C_4^2}{2q+1}}, \quad (0.56)$$

где

$$C_3 = \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m}, \quad C_4 = \frac{\det V_{q-m}^{m+1}}{\det V_{q-m-1}^m},$$

$$U_r^m = (A_{k-s+r})_{k,s=1}^m, \quad V_r^m = (B_{k-s+r})_{k,s=1}^m.$$

Таким образом, основные результаты теории ускорения сходимости разложений гладких функций, описанные в разделах 0.1-0.5, а также соответствующие алгоритмы, перенесены на случай одномерной системы Дирака для 2-компонентной вектор-функции.

Асимптотические свойства КЕГ и QR-методов

1.1 Приближенное нахождение скачков

Предположим, что, в системе (0.9), $n_i \neq n_j$, если $i \neq j$ и, более того,

$$\alpha N \leq |n_s| \leq N, \quad s = 1, \dots, q \quad (1.1)$$

для некоторого фиксированного $0 < \alpha \leq 1$. Приведем оценку ошибки при приближенном определении скачков $\{A_k(f)\}$.

Систему (0.9) можно переписать в следующей форме

$$2(-1)^{n_s+1} f_{n_s} i \pi n_s = \sum_{k=0}^{q-1} \tilde{A}_k(f) x_s^k, \quad s = 1, \dots, q, \quad (1.2)$$

где

$$x_s = \frac{1}{i \pi n_s}, \quad s = 1, \dots, q.$$

Обозначив

$$y_s = 2(-1)^{n_s+1} f_{n_s} x_s^{-1}, \quad (1.3)$$

систему (1.2) можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{q-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{q-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_q & x_q^2 & \dots & x_q^{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_0(f) \\ \tilde{A}_1(f) \\ \vdots \\ \tilde{A}_{q-1}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Хорошо известен алгоритм решения системы с матрицей Вандермонда (см. например [58]). В его основе лежат следующие соображения.

Пусть $P_j(x)$ полином степени $q - 1$

$$P_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^q \frac{x - x_n}{x_j - x_n} = \sum_{k=1}^q m_{jk} x^{k-1}, \quad j = 1, \dots, q, \quad (1.5)$$

где через m_{jk} мы обозначили коэффициенты $P_j(x)$. Из уравнений

$$P_j(x_i) = \sum_{k=1}^q m_{jk} x_i^{k-1} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, q,$$

(где δ_{ij} символ Кронекера) очевидно что транспонента (m_{jk}) будет обратной матрице Вандермонда (x_i^{k-1}) в левой стороне уравнения (1.4). Решение уравнения (1.4) можно записать как

$$\tilde{A}_{j-1}(f) = \sum_{k=1}^q m_{kj} y_k, \quad j = 1, \dots, q. \quad (1.6)$$

Сначала явно вычислим коэффициенты m_{kj} . Имеем

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^q (x - x_n) = \frac{1}{x - x_j} \prod_{n=1}^q (x - x_n) = \frac{1}{x - x_j} \sum_{n=0}^q \gamma_n x^n = \sum_{n=0}^{q-1} \beta_n x^n,$$

где через β_n и γ_n мы обозначили коэффициенты соответствующих полиномов. После несложных вычислений получим

$$\beta_n = -\frac{1}{x_j^{n+1}} \sum_{s=0}^n \gamma_s x_j^s, \quad n = 0, \dots, q - 1.$$

Вставляя полученное представление в (1.5), найдем

$$P_j(x) = -\frac{1}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^q (x_j - x_n)} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^k}{x_j^{k+1}} \sum_{s=0}^k \gamma_s x_j^s, \quad j = 1, \dots, q, \quad (1.7)$$

а из (1.5)

$$m_{jk} = -\frac{1}{x_j^k \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^q (x_j - x_n)} \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_s x_j^s, \quad k, j = 1, \dots, q. \quad (1.8)$$

Используя (1.6) и (1.8), получим

$$\tilde{A}_{j-1}(f) = -\sum_{k=1}^q \frac{y_k}{x_k^j \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^q (x_k - x_n)} \sum_{s=0}^{j-1} \gamma_s x_k^s, \quad j = 1, \dots, q. \quad (1.9)$$

Наконец, из (1.3), получим

$$\tilde{A}_j(f) = 2 \sum_{k=1}^q \frac{(-1)^{n_k} f_{n_k}}{x_k^{j+2} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^q (x_k - x_n)} \sum_{s=0}^j \gamma_s x_k^s, \quad j = 0, \dots, q-1. \quad (1.10)$$

Лемма 1.1 Пусть $x_s = (i\pi n_s)^{-1}$ и $\alpha N \leq |n_s| \leq N$, $s = 1, \dots, q$ для фиксированного $0 < \alpha \leq 1$. Обозначим

$$\omega_j(q) = \sum_{k=1}^q \frac{x_k^j}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^q (x_k - x_n)}, \quad j \geq 0; \quad (1.11)$$

тогда

$$(a) \quad \omega_j(q) = 0, \quad j = 0, \dots, q-2,$$

$$(b) \quad \omega_{q-1}(q) = 1,$$

$$(c) \quad \omega_j(q) = O(N^{q-j-1}) \text{ для всех } j \geq 0 \text{ когда } N \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Исходя из того, что интерполяционные полиномы Лагранжа степени $(q-1)$ точны для одночлена x^k при $k = 0, \dots, q-1$, представим x^j в следующем виде

$$x^j = \sum_{k=1}^q x_k^j \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^q \frac{x - x_s}{x_k - x_s} = \sum_{s=1}^q b_s(j) x^{s-1}, \quad j = 0, \dots, q-1,$$

где $b_s(j)$ - коэффициенты соответствующего полинома. Заметим также, что $b_q(j) = \omega_j(q)$. Это утверждение доказывает (a) и (b). Для доказательства утверждения (c), заметим, что

$$\omega_j(q) = \sum_{k=1}^q \operatorname{Res}_{z=x_k} \phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{\alpha N}} \phi_j(z) dz, \quad (1.12)$$

где

$$\phi_j(z) = \frac{z^j}{\prod_{s=1}^q (z - x_s)}.$$

Из (1.12), имеем

$$|\omega_j(q)| \leq \frac{1}{2\pi(\alpha N)^{j+1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\prod_{s=1}^q \left| \frac{e^{i\varphi}}{\alpha N} - \frac{1}{i\pi n_s} \right|} = O(N^{q-j-1}), \quad N \rightarrow \infty.$$

□

Мы часто будем пользоваться следующим простым фактом

Лемма 1.2 *Предположим, что числа n_s удовлетворяют условию (1.1) и γ_j коэффициенты полинома $\prod_{s=1}^q (x - x_s) = \sum_{j=0}^q \gamma_j x^j$. Тогда*

$$\gamma_j = O(N^{-q+j}), \quad j = 0, \dots, q-1, \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из обобщенных формул Виета.

□

Следующая теорема показывает как значения $\tilde{A}_k(f)$, определенные из системы (0.9), асимптотически приближают скачки $A_k(f)$ функции f , в зависимости от выбора $\{n_s\}$. Кратностью элемента x в последовательности x_1, x_2, \dots, x_m назовем число повторений x в этой последовательности.

Теорема 1.1 *Пусть $q \geq 1$ и индексы $n_s = n_s(N)$ выбраны так, что*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_s}{N} = c_s \neq 0, \quad s = 1, \dots, q, \quad (1.14)$$

и пусть α наибольшая кратность элементов в последовательности c_1, c_2, \dots, c_q .

Тогда, если $f \in C^{q+\alpha-1}[-1, 1]$ и $f^{(q+\alpha-1)} \in AC[-1, 1]$, то имеет место оценка

$$\tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + o(N^{-q+j}), \quad N \rightarrow \infty, \quad j = 0, \dots, q-1,$$

где константы χ_j суть коэффициенты полинома

$$\prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right) = \sum_{s=0}^q \chi_s x^s.$$

Доказательство. Интегрируя равенство (0.4) по частям (α)-раз, получим

$$\begin{aligned} f_{n_k} &= \frac{(-1)^{n_k+1}}{2} \sum_{s=0}^{q-1} \frac{A_s(f)}{(i\pi n_k)^{s+1}} + \frac{A_q(f)(-1)^{n_k+1}}{2(i\pi n_k)^{q+1}} + \\ &\quad \frac{(-1)^{n_k+1}}{2} \sum_{s=q+1}^{q+\alpha-1} \frac{A_s(f)}{(i\pi n_k)^{s+1}} + \frac{1}{2(i\pi n_k)^{q+\alpha}} \int_{-1}^1 f^{(q+\alpha)}(x) e^{-i\pi n_k x} dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Используя (1.10) и лемму 1.1 получим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \sum_{\ell=0}^j \gamma_\ell \omega_{q-j+\ell-1}(q) - \sum_{s=q+1}^{q+\alpha-1} A_s(f) \sum_{\ell=0}^j \gamma_\ell \omega_{s-j+\ell-1}(q) + \\ + \sum_{k=1}^q \frac{(-1)^{n_k} \varepsilon_{n_k} x_k^{q+\alpha-2-j}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^q (x_k - x_s)} \sum_{\ell=0}^j \gamma_\ell x_k^\ell, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\varepsilon_{n_k} = \int_{-1}^1 f^{(q+\alpha)}(x) e^{-i\pi n_k x} dx = o(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

Воспользовавшись утверждениями (a) и (b) Леммы 1.1, имеем

$$A_q(f) \sum_{\ell=0}^j \gamma_\ell \omega_{q-j+\ell-1}(q) = A_q(f) \gamma_j, \quad j = 0, \dots, q-1.$$

Используя Лемму 1.2 и утверждение (c) Леммы 1.1, для второй суммы в (1.16) получим

$$\sum_{s=q+1}^{q+\alpha-1} A_s(f) \sum_{\ell=0}^j \gamma_\ell \omega_{s-j+\ell-1}(q) = O(N^{-q+j-1}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Для третьей же суммы заметим, что

$$\left| \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^q (x_k - x_s)} \right| \leq \frac{\pi^{q-1} N^{2q-2}}{q \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^q |n_k - n_s|} \leq \text{const} \frac{N^{2q-2}}{N^{q-\alpha}} = O(N^{q+\alpha-2}), \quad N \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

поскольку при $k \neq s$ имеет место $|n_k - n_s| \geq 1$, а также, хотя бы для $q - \alpha$ индексов, $|n_k - n_s| \geq \text{const}N$, при $c_k \neq c_s$ (для достаточно больших N). А из Леммы 1.2 имеем $\gamma_\ell x_k^\ell = O(N^{-q})$. Вследствие этого получим, что третья сумма в (1.16) имеет порядок $o(N^{-q+j})$, при $N \rightarrow \infty$.

$$\tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \gamma_j + o(N^{-q+j}).$$

Используя теперь формулы Виета, получим

$$N^{q-j} \gamma_j - \frac{\chi_j}{(i\pi)^{q-j}} = \left(-\frac{1}{i\pi} \right)^{q-j} \sum_{1 \leq s_1 < \dots < s_{q-j} \leq q} \left(\frac{N}{n_{s_1}} \dots \frac{N}{n_{s_{q-j}}} - \frac{1}{c_{s_1}} \dots \frac{1}{c_{s_{q-j}}} \right), \quad j = 0, \dots, q-1,$$

правая часть которого стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. \square

В следующей теореме мы получим более сильное утверждение. А именно ошибка приближения будет $O(N^{-q+j-1})$ вместо $o(N^{-q+j})$. Этого можно добиться, если потребовать, чтобы функция f имела производные более высокого порядка и последовательность $\{\frac{n_s}{N}\}$ сходилась со скоростью $\frac{1}{N}$, $N \rightarrow \infty$. Доказательство очевидно.

Теорема 1.2 Пусть $q \geq 1$, и индексы $n_s = n_s(N)$ выбраны так, что

$$\frac{n_s}{N} = c_s + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

для $s = 1, \dots, q$, c_s различны от нуля. Пусть α наибольшая кратность элементов в последовательности c_1, c_2, \dots, c_q .

Тогда, если $f \in C^{q+\alpha}[-1, 1]$ и $f^{(q+\alpha)} \in AC[-1, 1]$, то имеет место оценка

$$\tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + O(N^{-q+j-1}), \quad N \rightarrow \infty, \quad j = 0, \dots, q-1, \quad (1.19)$$

где константы χ_j определены в теореме 1.1.

Следующая теорема показывает, что можно оценить точность приближения $\tilde{A}_j(f)$ к $A_j(f)$ даже при отсутствии ограничений на индексы.

Теорема 1.3 Пусть $q \geq 1$ и $f \in C^{2q-1}[-1, 1]$, $f^{(2q-1)} \in AC[-1, 1]$. Тогда, если (1.1) верно, то:

$$\tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + o(N^{-q+j}), \quad j = 0, \dots, q-1, \quad N \rightarrow \infty,$$

где константы χ_j определены в теореме 1.1.

Доказательство. Как и в теореме 1.1, возьмем $\alpha = q$. Для оценки третьей суммы в (1.16) используем формулу

$$\left| \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^q (x_k - x_s)} \right| \leq \frac{\pi^{q-1} N^{2q-2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^q |n_k - n_s|} \leq \pi^{q-1} N^{2q-2} = O(N^{2q-2}), \quad N \rightarrow \infty$$

поскольку $|n_k - n_s| \geq 1$, при $k \neq s$. \square

Эти оценки также уточняются.

Теорема 1.4 Пусть $q \geq 1$ и $f \in C^{2q}[-1, 1]$, $f^{(2q)} \in AC[-1, 1]$. Тогда, если (1.1) верно, то:

$$\tilde{A}_j(f) = A_j(f) - A_q(f) \frac{\chi_j}{(i\pi N)^{q-j}} + O(N^{-q+j-1}), \quad j = 0, \dots, q-1, \quad N \rightarrow \infty, \quad (1.20)$$

где константы χ_j определены в теореме 1.1.

1.2 Асимптотические оценки L_2 -нормы ошибки метода КЕГ

Если в (0.7), вместо $\{A_k(f)\}$ использованы $\{\tilde{A}_k(f)\}$ то соответствующую аппроксимацию обозначим через $\tilde{S}_{q,N}$:

$$\tilde{S}_{q,N}(f) = \sum_{n=-N}^N \left(f_n - \sum_{k=0}^{q-1} \tilde{A}_k(f) B_{k,n} \right) e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^{q-1} \tilde{A}_k(f) B_k(x), \quad (1.21)$$

а ошибку через $\tilde{R}_{q,N}(f)$

$$\tilde{R}_{q,N}(f) = f(x) - \tilde{S}_{q,N}(f).$$

В настоящем разделе будет рассмотрено асимптотическое поведение аппроксимации (1.21) для различного выбора чисел $\{n_s\}$ в системе (0.9).

Теорема 1.5 Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{q,N}(f)\| = |A_q(f)| d_2(q),$$

где

$$d_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^1 \prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.22)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что при $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{q,N}(f) &= R_{q,N}(f) + \sum_{|n|>N} e^{i\pi n x} \sum_{k=0}^{q-1} \left(A_k(f) - \tilde{A}_k(f) \right) B_{k,n} = \\ &= \sum_{|n|>N} e^{i\pi n x} \sum_{k=0}^{q-1} \left(A_k(f) - \tilde{A}_k(f) \right) B_{k,n} + A_q(f) \sum_{|n|>N} B_{q,n} e^{i\pi n x} + \theta_N(x), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $\|\theta_N\| = o(N^{-q-1/2})$. С другой стороны, для $n > N$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q-1} (A_k(f) - \tilde{A}_k(f)) B_{k,n} &= \frac{A_q(f)(-1)^{n+1}}{2i\pi n} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\gamma_k}{(i\pi n)^k} + \frac{o(N^{-q})}{n} = \\
&= \frac{A_q(f)(-1)^{n+1}}{2i\pi n} \left(\sum_{k=0}^q \frac{\gamma_k}{(i\pi n)^k} - \frac{1}{(i\pi n)^q} \right) + \frac{o(N^{-q})}{n} = \\
&= \frac{A_q(f)(-1)^{n+1}}{2i\pi n} \left(\prod_{k=1}^q \left(\frac{1}{i\pi n} - \frac{1}{i\pi n_k} \right) - \frac{1}{(i\pi n)^q} \right) + \frac{o(N^{-q})}{n} = \\
&= \frac{A_q(f)(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \left(\prod_{k=1}^q \left(1 - \frac{n}{n_k} \right) - 1 \right) + \frac{o(N^{-q})}{n}. \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Из (1.24) имеем

$$\|\tilde{R}_{q,N}(f)\|^2 = \frac{|A_q(f)|^2}{2\pi^{2q+2}} \sum_{|n|>N} \left| \frac{1}{n^{q+1}} \prod_{k=1}^q \left(1 - \frac{n}{n_k} \right) \right|^2 + o(N^{-2q-1}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.25)$$

После умножения этой оценки на N^{2q+1} , сумма в правой части уравнения будет Римановой суммой интеграла

$$\frac{1}{2\pi^{2q+2}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} \frac{1}{t^{2q+2}} \prod_{s=1}^q \left(1 - \frac{t}{c_s} \right)^2 dt. \quad (1.26)$$

Учитывая тот факт, что подынтегральная функция положительная и монотонно убывает, начиная с некоторого Θ , то, очевидно,

$$0 < h \sum_{v=\frac{\Theta}{h}}^{\infty} g(vh) - \int_{\Theta}^{\infty} g(x) dx < hg(\Theta),$$

где $g(x)$ подынтегральная функция в (1.26). Из последнего следует, что Риманова сумма (1.25) стремится к соответствующему интегралу. Заменой переменной $t = 1/x$ завершается доказательство теоремы. \square

Замечание 1.1 Заметим, что порядок сходимости в теореме 0.1 совпадает с порядком сходимости в теореме 1.5, т.е. приближенное вычисление скачков не ухудшает порядка сходимости.

В [59] предложены следующие последовательности значений c_s

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots$$

В таблице 1.1, показано насколько увеличивается ошибка $\tilde{R}_{q,N}$ относительно к $R_{q,N}$ для выше приведенных c_s .

q	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2(q)/d_1(q)$	2.0	1.63	3.93	8.46	14.42	21.62	31.89	41.39

Таблица 1.1: Численные значения отношения $d_2(q)/d_1(q)$ для различных значений q

Замечание 1.2 Из (1.22) следует, что константа $d_2(q)$ будет минимальной, если $c_s = \pm 1$, для всех $s = 1, \dots, q$ и, следовательно, аппроксимация в этом случае будет наилучшей. Следующая теорема явно вычисляет значения $d_2(q)$ в этом случае.

Теорема 1.6 Предположим, что выполнены условия теоремы 1.1 и более того $c_s = \pm 1$, $s = 1, \dots, q$. Тогда, если кратность числа 1 в последовательности c_1, \dots, c_q равно n , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{q,N}(f)\| = |A_q(f)| d_3(q),$$

$$d_3(q) = \frac{2^q}{\pi^{q+1} \sqrt{(2q+1) \binom{2q}{2n}}}.$$

Доказательство. Используя теорему 1.5

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{q,N}(f)\| = |A_q(f)| d_3(q),$$

где

$$\begin{aligned} d_3(q) &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^1 \prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi^{q+1}} \left(\int_{-1}^1 (x-1)^{2n} (x+1)^{2(q-n)} dx \right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi^{q+1}} \left(\frac{2^{2q+1} (2n)! (2q-2n)!}{(2q+1)!} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим несколько выборов индексов n_s , которые были использованы в литературе для восстановления скачков функции f (см. [59], [11],[12], [28]). Первый выбор, когда

$$N - c \leq n_s \leq N, \quad s = 1, \dots, q \quad (1.27)$$

для фиксированной константы c . В этом случае имеем

$$d_4(q) = \frac{1}{\pi^{q+1}} \frac{2^q}{\sqrt{2q+1}}. \quad (1.28)$$

Сравнивая эту константу с тем случаем, когда точные скачки известны, получим

$$\frac{d_4(q)}{d_1(q)} = 2^q.$$

Следующий случай более симметричный. Обозначим $m = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, и пусть

$$\begin{aligned} -N \leq n_s \leq -N + c, \quad s = 1, \dots, m, \\ N - c \leq n_s \leq N, \quad s = m + 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где c фиксированная константа. В этом случае имеем

$$d_5(q) = \begin{cases} \frac{2^q q!}{\pi^{q+1}} \frac{1}{\sqrt{(2q+1)!}}, & q = 2m, \\ \frac{2^q q!}{\pi^{q+1}} \frac{\sqrt{q+1}}{\sqrt{q(2q+1)!}}, & q = 2m + 1. \end{cases} \quad (1.30)$$

Отношение d_5/d_1 показывает эффективность $S_{q,N}$ по сравнению с $\tilde{S}_{q,N}$ для выбора n_s как в (1.29). Действительно, из формулы Стирлинга получим

$$\frac{d_5(q)}{d_1(q)} \approx \begin{cases} (\pi q)^{1/4}, & q = 2m, \\ (\pi q)^{1/4} \sqrt{1 + \frac{1}{q}}, & q = 2m + 1. \end{cases}$$

Интересно заметить, что эта точность сходимости имеет порядок 10^{-1} начиная с $q = 1$.

Выбор n_s определенный в (1.29) оптимальный.

Теорема 1.7 *Предположим, что $f \in C^{2q-1}[-1, 1]$, $f^{(2q)} \in AC[-1, 1]$ для фиксированного $q \geq 1$, и пусть выбор $n_s = n_s(N)$ удовлетворяет условию (1.1). Тогда следующая оценка верна*

$$\|\tilde{R}_{q,N}(f)\| = O(N^{-q-1/2}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.31)$$

Но с другой стороны,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{q,N}(f)\| \geq |A_q(f)| d_5(q),$$

где $d_5(q)$ определена в (1.30).

1.3 Асимптотические оценки L_2 -нормы ошибки метода QR

Если в (0.10) использованы приближенные значения $\tilde{A}_k(f)$, то соответствующую аппроксимацию обозначим через $\tilde{S}_{m,q,N}$. Аналогично (0.11), (0.12)

$$\tilde{S}_{m,q,N}(f) = \tilde{Q}(x) + \sum_{n=-N}^N (f_n - \tilde{Q}_n) e^{i\pi n x},$$

где

$$\tilde{Q}_n = \frac{(-1)^{n+1} (i\pi n)^m}{2 \prod_{s=1}^m (i\pi n + \tilde{\theta}_s)} \sum_{k=0}^{q-m-1} \frac{\Delta_k^m(\tilde{\theta})}{(i\pi n)^{k+1}}, \quad (1.32)$$

числа $\Delta_k^m(\tilde{\theta})$ определены рекуррентно следующим образом

$$\Delta_k^0(\tilde{\theta}) = \tilde{A}_k(f), \quad \Delta_k^s = \Delta_k^{s-1}(\tilde{\theta}) + \theta_s \Delta_{k-1}^{s-1}(\tilde{\theta}), \quad k \geq 1,$$

а последовательность $\tilde{\theta}_k$ определяется из системы

$$\Delta_k^m(\tilde{\theta}) = 0, \quad k = q - m, \dots, q - 1. \quad (1.33)$$

После несложных вычислений получим

$$\tilde{R}_{m,q,N}(f) = f(x) - \tilde{S}_{m,q,N}(f) = \sum_{|n|>N} P_n e^{i\pi n x} + \sum_{|n|>N} (Q_n - \tilde{Q}_n) e^{i\pi n x}. \quad (1.34)$$

Остановимся на аналоге теоремы 1.5 для аппроксимации $\tilde{S}_{m,q,N}$ в частном случае $m = 1$.

Теорема 1.8 Пусть выполнены условия теоремы 1.1, $q \geq 2$ и $A_{q-2}(f) \neq 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+\frac{1}{2}} \|\tilde{R}_{1,q,N}(f)\| = h_2(q), \quad (1.35)$$

$$h_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^{q+1}}} \left(\int_{-1}^1 \left| A_q(f) \prod_{s=1}^q \left(x - \frac{1}{c_s} \right) - \frac{A_{q-1}(f)^2}{A_{q-2}(f)} x^q \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Из (0.13) и (1.32) при $m = 1$ имеем

$$Q_n - \tilde{Q}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-3} \frac{A_k(f) - \tilde{A}_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q-2}} \left(\frac{A_{q-2}(f)}{i\pi n + \theta_1} - \frac{\tilde{A}_{q-2}(f)}{i\pi n + \tilde{\theta}_1} \right). \quad (1.36)$$

Из теоремы 1.1 и системы (1.33) получим

$$\tilde{\theta}_1 = -\frac{\tilde{A}_{q-1}(f)}{\tilde{A}_{q-2}(f)} = -\frac{A_{q-1}(f)}{A_{q-2}(f)} + \frac{A_q(f)}{A_{q-2}(f)} \frac{\chi_{q-1}}{i\pi N} + o(N^{-1}) \quad N \rightarrow \infty.$$

Подставляя это значение в (1.36) и еще раз используя теорему 1.1, получим

$$Q_n - \tilde{Q}_n = \frac{(-1)^{n+1} A_q(f)}{2(i\pi N)^{q+1}} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\chi_k}{(n/N)^{k+1}} + \frac{o(N^{-q})}{n}, \quad n > N, \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

Подставляя (1.37) и (0.14) при $m = 1$ в (1.34), после несложных преобразований придем к асимптотической оценке

$$\|\tilde{R}_{1,q,N}(f)\|^2 = \frac{N^{-2q-2}}{2\pi^{2q+2}} \sum_{|n|>N} \left| A_q(f) \sum_{k=0}^q \frac{\chi_k}{(n/N)^{k+1}} - \frac{A_{q-1}(f)^2}{A_{q-2}(f)(n/N)^{q+1}} \right|^2 + o(N^{-2q-1}).$$

Устремляя N к бесконечности и заменяя Риманову сумму соответствующим интегралом, получим оценку

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} \|\tilde{R}_{1,q,N}(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi^{2q+2}} \int_{R \setminus (-1,1)} \left| A_q(f) \sum_{s=0}^q \frac{\chi_s}{x^{k+1}} - \frac{A_{q-1}(f)^2}{A_{q-2}(f)x^{q+1}} \right|^2 dx.$$

Сделав замену переменной $x = 1/t$, придем к (1.35). \square

Соотношение $h_{1,1}(q)/h_2(q)$ также характеризует аппроксимационные способности методов $S_{1,q,N}$ и $\tilde{S}_{1,q,N}$ (смотри теорему 0.2), только в этом случае $h_2(q)$ зависит не только от способа вычисления скачков, но и от конкретной функции (точнее, от ее скачков). Рассмотрим частный пример

$$f(x) = J_0(4x - 1), \quad (1.38)$$

где J_0 – функция Бесселя. В нижеследующей таблице показано соотношение $h_{1,1}(q)/h_2(q)$ для (1.38) при различных значениях q .

q	2	3	4	5	6	7
$h_{1,1}(q)/h_2(q)$	1.14	0.83	1.46	0.97	1.54	0.96

Таблица 1.2: численные значения отношения $h_{1,1}(q)/h_2(q)$ для различных значений q

Как видим из таблицы, в этом случае при нечетных значениях q использование приближенных значений $\tilde{A}_k(f)$ приводит даже к более точной аппроксимации, а при четных ошибка может быть больше лишь в полтора раза.

Аналогично можно получить оценки для $\tilde{R}_{2,3,N}(f)$ при других значениях m и q .

Рассмотрим, например, два частных случая: $m = 2, q = 3$ и $m = 3, q = 4$.

Теорема 1.9 Пусть выполнены условия теоремы 1.1 для $m = 2, q = 3$ и $A_0(f) \neq 0$.

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{7/2} \|\tilde{R}_{2,3,N}(f)\| = h_3, \quad (1.39)$$

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^4} \left(\int_{-1}^1 \left| A_3(f) \prod_{s=1}^3 \left(x - \frac{1}{c_s} \right) + \frac{A_1(f)^3 - 2A_0(f)A_1(f)A_2(f)}{A_0(f)^2} x^3 \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Система (0.15), в этом случае, имеет треугольную форму

$$\begin{cases} A_1(f) + (\theta_1 + \theta_2)A_0(f) = 0, \\ A_2(f) + (\theta_1 + \theta_2)A_1(f) + \theta_1\theta_2A_0(f) = 0. \end{cases}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = -\frac{A_1(f)}{A_0(f)}, \quad \theta_1\theta_2 = \frac{A_1(f)^2 - A_0(f)A_2(f)}{A_0^2(f)}$$

Используя теорему 1.1, получим асимптотику решений системы (1.33)

$$\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 = -\frac{A_1(f)}{A_0(f)} + \frac{A_3(f)\chi_1}{A_0(f)(i\pi N)^2} + o(N^{-2}), \quad (1.40)$$

$$\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 = \frac{A_1(f)^2 - A_0(f)A_2(f)}{A_0(f)^2} + \frac{A_3(f)\chi_2}{A_0(f)(i\pi N)} + o(N^{-1}). \quad (1.41)$$

Из (0.13), (1.32) и (0.14) получим оценки

$$Q_n - \tilde{Q}_n = \frac{(-1)^{n+1} A_3(f)\chi_1}{2(i\pi n)^2 (i\pi N)^2} + \frac{(-1)^{n+1} A_3(f)\chi_2}{2(i\pi n)^3 (i\pi N)} + \frac{(-1)^{n+1} A_3(f)\chi_0}{2(i\pi n) (i\pi N)^3} + \frac{o(N^{-1})}{n^3},$$

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^4} \left(A_3(f) + \frac{A_1(f)^3 - 2A_0(f)A_1(f)A_2(f)}{A_0(f)^2} \right) + O(n^{-5}).$$

Из (1.34) имеем

$$\|\tilde{R}_{2,3,N}(f)\|^2 = \frac{N^{-8}}{2\pi^8} \sum_{|n|>N} \left| A_3(f) \sum_{s=0}^3 \frac{\chi_s}{(n/N)^{s+1}} + \frac{A_1(f)^3 - 2A_0(f)A_1(f)A_2(f)}{A_0(f)^2} \frac{1}{(n/N)^4} \right|^2 + o(N^{-7}).$$

Устремляя N к бесконечности и заменяя Риманову сумму соответствующим интегралом, получим требуемое. \square

Теорема 1.10 Пусть выполнены условия теоремы 1.1 при $t = 3$, $q = 4$ и $A_0(f) \neq 0$.

Тогда имеет место асимптотическая оценка

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{9/2} \|\tilde{R}_{3,4,N}(f)\| = h_4, \quad (1.42)$$

$$h_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi^5}} \left(\int_{-1}^1 \left| A_4(f) \prod_{s=1}^4 \left(x - \frac{1}{c_s} \right) + \left(\frac{3A_2(f)A_1(f)^2}{A_0(f)^2} - \frac{A_1(f)A_3(f)}{A_0(f)} - \frac{A_2(f)^2}{A_0(f)} - \frac{A_1(f)A_3(f)}{A_0(f)} - \frac{A_1(f)^4}{A_0(f)^3} \right) x^4 \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Система (0.15), в этом случае, будет

$$\begin{cases} A_1(f) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)A_0(f) = 0, \\ A_2(f) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)A_1(f) + (\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3)A_0(f) = 0, \\ A_3(f) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)A_2(f) + (\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3)A_1(f) + \theta_1\theta_2\theta_3A_0(f) = 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = -\frac{A_1(f)}{A_0(f)}, \quad \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 = \frac{A_1(f)^2 - A_0(f)A_2(f)}{A_0^2(f)},$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3 = \frac{2A_0(f)A_1(f)A_2(f) - A_3(f)A_0(f)^2 - A_1(f)^3}{A_0(f)^3}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1.9 получим следующую асимптотику для решений системы (1.33)

$$\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_3 = -\frac{A_1(f)}{A_0(f)} + \frac{A_4(f)\chi_1}{A_0(f)(i\pi N)^2} + o(N^{-3}),$$

$$\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_3 + \tilde{\theta}_2\tilde{\theta}_3 = \frac{A_1(f)^2 - A_0(f)A_2(f)}{A_0(f)^2} + \frac{A_4(f)\chi_1}{A_0(f)(i\pi N)^2} + o(N^{-2}).$$

$$\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2\tilde{\theta}_3 = \frac{2A_0(f)A_1(f)A_2(f) - A_3(f)A_0(f)^2 - A_1(f)^3}{A_0(f)^3} + \frac{A_4(f)\chi_3}{A_0(f)^2 i\pi N} + o(N^{-1}).$$

Из (0.13), (1.32) и (0.14) получим оценки

$$Q_n - \tilde{Q}_n = \frac{(-1)^{n+1}A_4(f)}{2} \left(\frac{\chi_0}{(i\pi n)(i\pi N)^4} + \frac{\chi_1}{(i\pi n)^2(i\pi N)^3} + \frac{\chi_2}{(i\pi n)^3(i\pi N)^2} + \frac{\chi_3}{(i\pi n)^4(i\pi N)} \right) + \frac{o(N^{-1})}{n^4},$$

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^5} \left(A_4(f) + \frac{3A_2(f)A_1(f)^2}{A_0(f)^2} - \frac{A_1(f)A_3(f)}{A_0(f)} - \frac{A_2(f)^2}{A_0(f)} - \frac{A_1(f)A_3(f)}{A_0(f)} - \frac{A_1(f)^4}{A_0(f)^3} \right) + O(n^{-6}).$$

Из последних утверждений и следует теорема. \square

Ускорение сходимости разложений по собственным функциям некоторых граничных задач

2.1 Модельная краевая задача с разрывным коэффициентом

2.1.1 Предварительные построения

Граничные задачи для уравнений с разрывными коэффициентами представляют интерес в ряде приложений (см., например [60]). С целью демонстрации возможностей подхода 0.3-0.5 рассмотрим краевую задачу

$$i \frac{du}{dx} = \lambda \varepsilon(x) u(x), \quad |x| \leq 1, \quad (2.1)$$

$$u(-1) = u(1), \quad (2.2)$$

где $\varepsilon(x)$ определенная, $q + 1$ раз непрерывно дифференцируемая на каждом интервале $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ и кусочно непрерывная на $[-1, 1]$ функция с потенциальными точками разрыва первого рода для всех производных $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^\gamma$, $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_\gamma = 1$. Класс таких функций обозначим $C^{q+1}(\alpha)$.

Далее положим $\varepsilon(x) > \delta > 0$, $|x| \leq 1$. В данной главе будем рассматривать только вещественные функции.

Легко вычислить явно собственные функции и собственные значения задачи (2.1) -

(2.2)

$$\phi_n(x) = \left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\eta n \int_{-1}^x \varepsilon(t) dt}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

$$\lambda_n = -\pi\eta n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$\eta = \frac{2\pi}{\int_{-1}^1 \varepsilon(t) dt}.$$

Система собственных функций $\{\phi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ортогональна в весовом пространстве $L_2[-1, 1, \varepsilon]$.

Введем соответствующие обозначения

$$f_n = (f, \phi_n)_\varepsilon = \int_{-1}^1 \varepsilon(x) f(x) \overline{\phi_n(x)} dx, \quad (2.4)$$

$$M_N(f) = \sum_{-N}^N f_n \phi_n(x),$$

$$g_0(x) = f(x), \quad g_k(x) = \frac{g'_{k-1}(x)}{\varepsilon(x)},$$

$$A_k(f, -1) = g_k(1) - g_k(-1), \quad A_k(f, x) = g_k(x-0) - g_k(x+0).$$

Лемма 2.1 Пусть $\beta = \{\beta_k\}_{k=0}^\mu$, $-1 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_\mu = 1$, $\alpha \subset \beta$ и $f \in C^{q+1}(\beta)$,

тогда

$$f_n = P_n + F_n, \quad (2.5)$$

где

$$P_n = \sum_{l=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k A_k(f, \beta_l)}{(i\eta n)^{k+1}} \overline{\phi_n(\beta_l)}, \quad (2.6)$$

$$F_n = \frac{(-1)^{q+1}}{(i\eta n)^{(q+1)}} \int_{-1}^1 \varepsilon(x) g_{q+1}(x) \overline{\phi_n(x)} dx. \quad (2.7)$$

Доказательство. Если представить интеграл (2.4) в виде

$$f_n = \int_{-1}^1 \varepsilon(x) f(x) \overline{\phi_n(x)} dx = \sum_{l=0}^{\mu-1} \int_{\beta_l}^{\beta_{l+1}} \varepsilon(x) f(x) \overline{\phi_n(x)} dx,$$

и проинтегрировать по частям, то получим

$$\int_{\beta_l}^{\beta_{l+1}} \varepsilon(x) f(x) \overline{\phi_n(x)} dx = \left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{\beta_l}^{\beta_{l+1}} \varepsilon(x) f(x) e^{i\eta n \int_{-1}^x \varepsilon(x) dt} dx =$$

$$\left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{g_0(x) e^{i\eta n \int_{-1}^x \varepsilon(x) dt} \Big|_{\beta_l}^{\beta_{l+1}}}{i\eta n} - \frac{1}{i\eta n} \int_{\beta_l}^{\beta_{l+1}} \varepsilon(x) g_1(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

Отсюда имеем

$$\int_{-1}^1 \varepsilon(x) f(x) \overline{\phi_n(x)} dx = \sum_{l=0}^{\mu-1} \frac{A_0(f, \beta_l)}{i\eta n} \overline{\phi_n(\beta_l)} - \frac{1}{i\eta n} \int_{-1}^1 \varepsilon(x) g_1(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

Повторив этот процесс $(q-1)$ раз, получим желаемый результат. \square

Нам понадобится также следующая

Лемма 2.2 [25] Пусть $\{\alpha_s\}$, $s = 1, \dots, q$, $1 \leq q < \infty$ - некоторое конечное множество комплексных чисел и $\Upsilon \subseteq \{\alpha_s\}$ - подмножество целых чисел (возможно, пустое).

Тогда справедлива формула

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \notin \Upsilon}}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} p(k) \exp(i\pi k x)}{\prod_{s=1}^l (k - \alpha_s)^{\beta_s}} = \pi \sum_{r=1}^l \operatorname{Res}_{z=\alpha_r} \frac{p(z) \exp(i\pi z x^\dagger)}{\sin(\pi z) \prod_{s=1}^l (z - \alpha_s)^{\beta_s}},$$

где $\{\beta_s\}$, $(s = 1, \dots, q)$ - множество положительных целых чисел, $p(z)$ - многочлен степени, не выше $\sum_{s=1}^q \beta_s - 1$ и принято обозначение $x^\dagger = (x+1) \pmod{2} - 1$, $-1 < x^\dagger < 1$.

2.1.2 Ускорение сходимости разложения по собственным функциям модельной краевой задачи

Приведем краткое описание аналога КЕГ-метода (в применении к системе (2.3), назовем его КЕГ-М методом) в случае, когда $f \in C_{\beta}^{q+1}$, где $\beta = \{\beta_k\}_{k=0}^{\mu}$, $-1 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{\mu} = 1$, $\alpha \subset \beta$. Используя Леммы 2.1 и 2.2, можно представить функцию f в виде

$$f(x) = P(x) + F(x)$$

где

$$P(x) = \sum_{l=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^q \frac{(-1)^{k+1} A_k(f, \beta_l)}{2(i\eta)^k} \operatorname{Res}_{z=0} e^{-i\pi z(1 + \frac{\eta}{\pi} \int_{\beta_l}^x v(x) dx)^\dagger} \frac{1}{\sin(\pi z) z^{k+1}}.$$

Очевидно (см. (2.7)), коэффициенты Фурье $\{F_n\}$ функции F имеют порядок убывания, равный, по меньшей мере, $o(N^{-q-1})$, $N \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что аппроксимационная формула

$$M_{q,N}(x) = P(x) + \sum_{n=-N}^N F_n \phi_n(x)$$

сходится (в равномерной метрике) к f со скоростью порядка $o(N^{-q})$, $N \rightarrow \infty$.

Переходя к описанию аналога метода QR (ниже будем его называть QR-M методом), рассмотрим конечные последовательности комплексных чисел $\theta^l = \{\theta_k^l\}_{k=1}^m$, $A^l = \{A_k(f, \beta_l)\}_{k=0}^q$, $m \geq 1$ и обозначим

$$\Delta_k^0(A^l, \theta^l) = A_k(f, \beta_l),$$

$$\Delta_k^s(A^l, \theta^l) = \Delta_k^{s-1}(A^l, \theta^l) + \theta_s^l \Delta_{k-1}^{s-1}(A^l, \theta^l), \quad k \leq m.$$

Если $k < 0$, то примем $A_k(f, \beta_l) = 0$, $\Delta_k^s(A^l, \theta^l) = 0$.

Лемма 2.3 Пусть $f \in C^{q+1}(\beta)$ и $m \in \mathbb{N}$, $m < q$. Тогда

$$f_n = Q_n + H_n,$$

где

$$Q_n = \sum_{l=0}^{\mu-1} \left(\sum_{k=0}^{q-m} \frac{(-1)^k A_k(f, \beta_l)}{(i\eta n)^{k+1}} + \left(\frac{-1}{i\eta n} \right)^{q-m+2} \sum_{k=1}^m \frac{\theta_k^l \Delta_{q-m}^{k-1}(A^l, \theta^l)}{\prod_{s=1}^k (1 - \frac{\theta_s^l}{i\eta n})} \right) \overline{\phi_n(\beta_l)} + F_n$$

$$H_n = - \sum_{l=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{q-m} \left(\frac{-1}{i\eta n} \right)^{q+2} \sum_{k=1}^m \frac{\theta_k^l \Delta_q^{k-1}(A^l, \theta^l)}{\prod_{s=1}^k (1 - \frac{\theta_s^l}{i\eta n})} \overline{\phi_n(\beta_l)} -$$

$$\sum_{l=0}^{\mu-1} \frac{1}{\prod_{s=1}^m (1 - \frac{\theta_s^l}{i\eta n})} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k^m(A^l, \theta^l)}{(-i\eta n)^{k+1}} \overline{\phi_n(\beta_l)} + F_n$$

$$F_n = \frac{(-1)^{q+1}}{(i\eta n)^{(q+1)}} \int_{-1}^1 \varepsilon(x) g_{q+1}(x) \overline{\phi_n(x)} dx.$$

Доказательство. Нетрудно проверить следующее тождество ($x \neq -\theta_1^{-1}$)

$$\sum_{k=q-m+1}^q A_k x^k = x^{q+1} \theta_1 \frac{A_q - A_{q-m} x^{-m}}{1 + \theta_1 x} + \frac{1}{1 + \theta_1 x} \sum_{k=q-m+1}^q (A_k + \theta_1 A_{k-1}) x^k.$$

После m -кратного применения того же преобразования придем к формуле

$$\sum_{k=q-m+1}^q A_k x^k = -x^{q-m+1} \sum_{k=1}^m \frac{\theta_k \Delta_{q-m}^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_s x)} + x^{q+1} \sum_{k=1}^m \frac{\theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_s x)} + \frac{1}{\prod_{k=1}^m (1 + \theta_k x)} \sum_{k=q-m+1}^q \Delta_k^m(\theta) x^k, \quad x \notin \{-\theta_k^{-1}\}. \quad (2.8)$$

Доказательство завершается, если главную часть формулы (2.5) разделить на две суммы

$$f_n = \sum_{l=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{q-m} \frac{(-1)^k A_k(f, \beta_l)}{(i\eta n)^{k+1}} \overline{\phi_n(\beta_l)} + \sum_{l=0}^{\mu-1} \sum_{k=q-m+1}^q \frac{(-1)^k A_k(f, \beta_l)}{(i\eta n)^{k+1}} \overline{\phi_n(\beta_l)} + F_n,$$

и применить преобразование (2.8) ко второй сумме, с заменой x на $(i\eta n)^{-1}$. \square

Из Лемм 2.2 и 2.3 следует, что функцию f можно представить в виде

$$f(x) = Q(x) + H(x),$$

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \phi_n(x), \quad H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \phi_n(x),$$

где $Q(x)$ -квазиполином, т.е. конечная линейная комбинация функций вида $b(x)e^{cx}$, где $b(x)$ многочлен, $c = const \in \mathbb{C}$. Следуя работе [27], векторы $\theta^l = \{\theta_k^l\}_{k=1}^m$ для каждого фиксированного l ($l = 0, 1, \dots, \mu - 1$) определим из систем

$$\Delta_k^m(A^l, \theta^l) = 0, \quad k = q - m + 1, \dots, q.$$

В этом случае аппроксимационная формула

$$M_{m,q,N}(x) = Q(x) + \sum_{n=-N}^N P_n e^{i\pi n x}$$

сходится к f со скоростью порядка $o(N^{-q})$, $N \rightarrow \infty$. По сути, мы применили к асимптотическим степенным (по $z = (i\eta n)^{-1}$) рядам (2.6) аппроксимации Паде порядка $[(q - m)/m]$ (см. [30]).

В случае, когда $\varepsilon(x) \equiv 1$, наш ряд превращается в обыкновенный ряд Фурье, а кусочно-квазиполиномиальная функция P становится обобщенным полиномом Бернулли. Таким образом, метод КЕГ-М является естественным обобщением КЕГ метода и, соответственно, метод QR-М - обобщением QR-метода.

Таким образом, даже в случае наличия сингулярностей у функции ε в задаче (2.1) - (2.2) можно добиться ускорения сходимости разложения по собственным функциям.

Для иллюстрации свойств методов КЕГ-М и QP-М рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x + 1), & x \in [-1, 1/3) \\ \frac{1}{1.2 - x}, & x \in [1/3, 1] \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1/3) \\ 4, & x \in [1/3, 1] \end{cases}$$

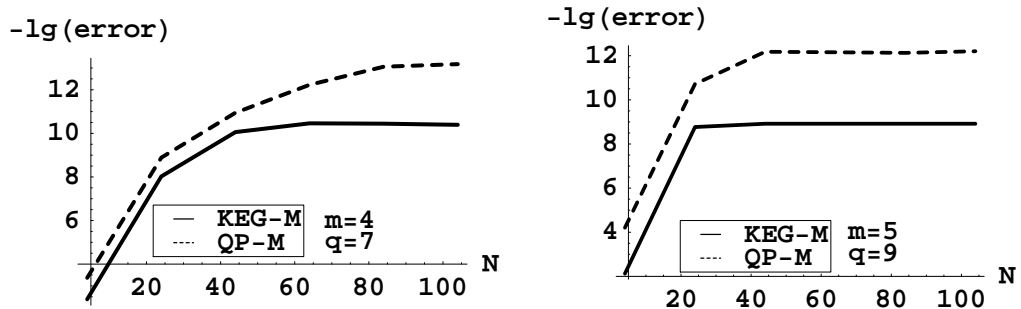


Рис. 2.1: Десятичные логарифмы обратных величин равномерных ошибок при аппроксимации функции (2.9).

На рис. 2.1 указаны порядки равномерных ошибок при аппроксимации функции (2.9) методами КЕГ-М и QP-М для различных значений N . Левый рисунок соответствует случаю $q = 5$, $m = 3$, а правый - случаю $q = 7$, $m = 4$.

На этих примерах хорошо просматривается явное преимущество QP-М метода как в смысле точности, так и в смысле устойчивости к накоплению ошибок.

2.2 Ускорение разложений по собственным вектор функциям краевой задачи для системы Дирака

2.2.1 Предварительные построения

Рассмотрим типичную краевую задачу для системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix} z = \lambda z, \quad (2.10)$$

$$z_1(-1) \sin \alpha + z_2(-1) \cos \alpha = 0, \quad (2.11)$$

$$z_1(1) \sin \beta + z_2(1) \cos \beta = 0, \quad (2.12)$$

где p_{ij} вещественные функции, определенные и имеющие непрерывную производную на интервале $[-1, 1]$, $p_{12} = p_{21}$, $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. В том случае, когда $p_{12}(x) = p_{21}(x) = 0$, $p_{11}(x) = V(x) + m$, $p_{22}(x) = V(x) - m$, где $V(x)$ потенциальная функция, а m масса частицы, система (2.10) в релятивистской квантовой теории известна под названием одномерной стационарной системы Дирака.

Следуя [43, 56], приведем некоторые, необходимые нам, известные факты и формулы, связанные с системой Дирака. Систему (2.10) можно переписать в каноническом виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y,$$

где

$$z(x) = \begin{pmatrix} \cos \mu(x) & -\sin \mu(x) \\ \sin \mu(x) & \cos \mu(x) \end{pmatrix} y(x),$$

$$p(x) = -\mu'(x) - p_{11}(x) \cos^2(\mu(x)) - p_{12}(x) \sin(2\mu(x)) - p_{22}(x) \sin^2(\mu(x)),$$

$$r(x) = -\mu'(x) - p_{11}(x) \sin^2(\mu(x)) + p_{12}(x) \sin(2\mu(x)) - p_{22}(x) \cos^2(\mu(x)),$$

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}.$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$y_2'(x) - (\lambda + p(x))y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) + (\lambda + r(x))y_2(x) = 0, \quad (2.13)$$

$$y_2(-1) \cos \alpha + y_1(-1) \sin \alpha = 0, \quad (2.14)$$

$$y_2(1) \cos \beta + y_1(1) \sin \beta = 0. \quad (2.15)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ фиксированное комплексное число. Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ решение системы (2.13) удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(-1, \lambda) = \cos \alpha, \quad \varphi_2(-1, \lambda) = -\sin \alpha,$$

а через $\phi(x, \lambda) = (\phi_1(x, \lambda), \phi_2(x, \lambda))^T$ - решение той же системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$\phi_1(1, \lambda) = \cos \beta, \quad \phi_2(1, \lambda) = -\sin \beta.$$

Очевидно, функции ϕ, φ , как решение соответствующих начальных задач существуют при любом $\lambda \in \mathbb{C}$.

Положим

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\omega(\lambda)} \phi(x, \lambda) \varphi^T(\xi, \lambda), & \xi \leq x, \\ \frac{1}{\omega(\lambda)} \varphi(x, \lambda) \phi^T(\xi, \lambda), & x < \xi. \end{cases} \quad (2.16)$$

где $\omega(\lambda)$ определитель Вронского

$$\omega(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) & \varphi_2(x, \lambda) \\ \phi_1(x, \lambda) & \phi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{v_n = (v_{n,1}, v_{n,2})^T\}_{n=-\infty}^{\infty}$ множество собственных значений и нормированных собственных вектор-функций задачи (2.13) - (2.15). Для краткости ряды по собственным функциям $\{v_n\}$ будем также называть рядами Фурье, а соответствующие коэффициенты - коэффициентами Фурье. Для матрицы-функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ краевой задачи (2.13) - (2.15) имеет место следующее представление:

$$G(x, \xi, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^T(\xi)}{\lambda_n - \lambda}$$

где ряд справа сходится равномерно вне каждой окрестности диагонали $x = \xi$ (см. [43]), а его производные по λ сходятся равномерно при $x, \xi \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ($\lambda \notin \{\lambda_n\}$).

Вектор-функция $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, где $f_i(x) \in L_2[-1, 1]$, принадлежит пространству $L_2^2[-1, 1] = L_2[-1, 1] \times L_2[-1, 1]$. Со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f^T(x)g(x)dx$$

$L_2^2[-1, 1]$ является Гильбертовым пространством.

Для функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_2^2[-1, 1]$ введем обозначения,

$$D_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n v_n(x), \quad c_n = \int_{-1}^1 v_n^T(x)f(x)dx, \quad (2.17)$$

$$DR_N(f) = f(x) - D_N(f).$$

Известно (см. [43]), что собственные вектор функции задачи (2.10)-(2.12) образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2^2[-1, 1]$, т.е. $D_N(f)$ сходится к f по норме L_2^2

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 (f_1^2(x) + f_2^2(x))dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим

$$Lf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{df}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} f,$$

$$Bf = B \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_k(x) = BL^k f(x), \quad k \geq 0,$$

где L^0 -тождественный оператор. Мы можем предположить, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением, т.к. в противном случае можно совершить стандартный сдвиг параметра λ .

Лемма 2.4 Пусть $p, r \in C^{q-1}[-1, 1]$, $p^{(q-1)}, r^{(q-1)} \in AC[-1, 1]$, $f \in C_2^q[-1, 1]$ и $f^{(q)} \in AC_2[-1, 1]$, причем $q \geq 1$. Тогда для коэффициентов c_n , определенных в (2.17) имеет место следующее представление:

$$c_n = P_n + F_n, \quad (2.18)$$

где

$$P_n = v_n^T(1) \sum_{k=0}^q \lambda_n^{-k-1} \tilde{f}_k(1) - v_n^T(-1) \sum_{k=0}^q \lambda_n^{-k-1} \tilde{f}_k(-1), \quad (2.19)$$

$$F_n = \lambda_n^{-q-1} \int_{-1}^1 v_n^T(x) L^{q+1}(f(x)) dx.$$

Доказательство. Имеем

$$c_n = \int_{-1}^1 v_n^T(x) f(x) dx = \lambda_n^{-1} \int_{-1}^1 (f_1(x)(v'_{n,2}(x) - p(x)v_{n,1}(x)) - f_2(x)(v'_{n,1}(x) + r(x)v_{n,2}(x))) dx$$

Интегрируя последнее равенство по частям, получим:

$$c_n = \lambda_n^{-1} (f_1(x)v_{n,2}(x) - f_2(x)v_{n,1}(x)) \Big|_{-1}^1 + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^1 v_{n,1}(x)(f'_2(x) - p(x)f_1(x)) + v_{n,2}(x)(-f'_1(x) - r(x)f_2(x)) dx = \lambda_n^{-1} v_n^T(x) \tilde{f}_0(x) \Big|_{-1}^1 + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^1 v_n^T(x) L(f(x)) dx$$

Повторяя интегрирование по частям q раз, получим требуемое. \square

2.2.2 Корректировка асимптотических формул для собственных значений и собственных вектор функций

В монографии [43] при выводе асимптотических формул были допущены некоторые неточности. Приведем соответствующее уточнение.

Пусть L_1 и L_2 - два линейных дифференциальных оператора, E_1 и E_2 - два линейных функциональных пространства. Нам понадобится

Определение 2.1 [43] *Линейный непрерывный оператор X отображающий пространство E_1 в E_2 , называется оператором преобразования, если он удовлетворяет условиям:*

- $L_1 X = X L_2$.
- Существует обратный непрерывный оператор X^{-1} .

Пусть L_1 и L_2 имеют вид

$$L_1 \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \quad L_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}$$

где p_1, r_1 , действительные и непрерывные функции на интервале $[-1, 1]$.

Пусть E суть совокупность непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f(x)$, удовлетворяющих краевому условию

$$f_1(-1) \sin \alpha + f_2(-1) \cos \alpha = 0.$$

Как показано в [43], в этом случае оператор-матрицу преобразования X можно задать в виде

$$X\{f(x)\} = R(x)f(x) + \int_{-1}^x K(x, s)f(s)ds,$$

где $R(x)$ и $K(x, s)$ - непрерывно дифференцируемые матрицы второго порядка, притом $R(x)$ имеет вид

$$R(x) \equiv \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}.$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно вычислить явно

$$\alpha(x) = \cos \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x (p(t) + r(t)) dt \right),$$

$$\beta(x) = \sin \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x (p(t) + r(t)) dt \right).$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2.5 [43] При $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по x справедливы оценки

$$\varphi_1(x) = \cos(\xi(x, \lambda) - \alpha) + O(\lambda^{-1}),$$

$$\varphi_2(x) = \sin(\xi(x, \lambda) - \alpha) + O(\lambda^{-1}),$$

где

$$\xi(x, \lambda) = \lambda(x + 1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^x (p(t) + r(t)) dt.$$

Собственные значения задачи (2.13), (2.14), (2.15) совпадают с корнями уравнения

$$\varphi_1(1, \lambda) \sin \beta + \varphi_2(1, \lambda) \cos \beta = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\cos(\xi(1, \lambda) - \alpha) \sin \beta + \sin(\xi(1, \lambda) - \alpha) \cos \beta = \sin(2\lambda + \theta) + O(\lambda^{-1}),$$

где

$$\theta = \beta - \alpha - \frac{1}{2} \int_0^\pi (p(t) + r(t)) dt.$$

Последняя формула в [43] была приведена в неточном виде. Из последнего для собственных значений получаем асимптотическую формулу:

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2} n - \frac{\theta}{2} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.20)$$

Пользуясь формулой (2.20), получим асимптотические формулы для собственных вектор-функций $u_n(x) = \varphi(x, \lambda_n)$, а именно:

$$u_{n,1} = \cos(\xi_n - \alpha) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$u_{n,2} = \sin(\xi_n - \alpha) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\xi_n = \xi(n, x) = \lambda_n(x + 1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau.$$

Чтобы получить асимптотические разложения нормированных собственных вектор-функций, рассмотрим норму u_n :

$$\|u_n\|_2^2 = \int_{-1}^1 (u_{n,1}^2(x) + u_{n,2}^2(x)) dx = 2 + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

следовательно нормированные вектор-функции имеют вид ($v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_2}$)

$$v_{n,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\xi_n - \alpha) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.21)$$

$$v_{n,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\xi_n - \alpha) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

Отметим, что для другого канонического вида системы (2.10) асимптотические формулы получены в работе [48]. А именно, если рассмотреть краевую задачу:

$$\begin{aligned} \left\{ B \frac{d}{dx} + \Omega(x) \right\} y &= \lambda y, \\ y_1(0) \cos \alpha + y_2(0) \sin \alpha &= 0, \\ y_1(\pi) \cos \beta + y_2(\pi) \sin \beta &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) & \rho(x) \\ \rho(x) & -\xi(x) \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1 [48] Пусть $\xi, \rho \in L^1_C[0, \pi]$, а α и β есть комплексные числа. Тогда вышеуказанная задача имеет счетное число собственных значений, которые обладают асимптотикой

$$\lambda_n = n + \frac{\beta - \alpha}{\pi} + o(1).$$

2.2.3 Явление Гиббса для системы Дирака

Как известно, разложения по собственным функциям классических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений равномерно сходятся, если разлагаемая функция принадлежит области определения соответствующего оператора. Если же она не удовлетворяет краевым условиям, то в этом случае имеет место явление, аналогичное явлению Гиббса. Это явление в частных случаях было изучено в ряде работ (см. Л.Мишо [61, 62], Л.Брандолини и Л. Калзони [63] а также [64, 65, 66, 67, 68]). Как показал Р. Шмитковски [50], разложения по собственным функциям системы Дирака не сходятся к разлагаемой функции в концах интервала, даже если эта функция из класса $C_2^\infty[-1, 1]$, но не удовлетворяет краевым условиям.

Например, функция

$$\kappa(x) = \begin{pmatrix} x - 1 \\ -x + 1 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

не удовлетворяет краевым условиям в точке $x = -1$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$. Рассмотрим ее разложение по системе $\{v_n(x)\}$:

$$D_N(\kappa) = \sum_{n=-N}^N c_n(\kappa)v_n(x), \quad (2.24)$$

где $c_n(\kappa) = \int_{-1}^1 v_n^T(x)\kappa(x)dx$.

Лемма 2.6 *Если $p, r \in C^1[-1, 1]$ и функция κ определена в (2.23), тогда коэффициенты разложения функции (2.23) имеют асимптотическую оценку*

$$c_n(\kappa) = \sqrt{2}\lambda_n^{-1}(\cos \alpha - \sin \alpha) + \alpha_n, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\{\alpha_n\} \in l_2$.

Доказательство. Используя лемму 2.4 для функции (2.23) получим:

$$\begin{aligned} c_n &= v_n^T(1)\lambda_n^{-1}\tilde{\kappa}_0(1) - v_n^T(-1)\lambda_n^{-1}\tilde{\kappa}_0(-1) + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^1 v_n^T(x)L^1(\kappa(x))dx = \\ &\quad \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) v_n^T(-1)\lambda_n^{-1}\tilde{\kappa}_0(-1) + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^1 v_n^T(x)L^1(\kappa(x))dx = \\ &\quad \sqrt{2}\lambda_n^{-1}(\cos \alpha - \sin \alpha) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^1 v_n^T(x)L^1(\kappa(x))dx. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт что $L^1(\kappa(x)) \in L_2^2[-1, 1]$, получим желаемый результат. \square

Введем теперь обозначения

$$BC(f, x, \gamma) = f_1(x) \sin \gamma + f_2(x) \cos \gamma.$$

Покажем теперь, что если $p, r \in C^1[-1, 1]$ и функция κ определена в (2.23), тогда, если $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, для функции κ имеет место явление Гиббса, а именно

$$\limsup_{\substack{N \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -1}} \frac{|BC(D_N(\kappa), x, \alpha)|}{|BC(\kappa, -1, \alpha)|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Для этого рассмотрим ошибку при приближении функции (2.23) урезанным рядом

$$DR_N(\kappa) = \sum_{\|n\|>N} c_n v_n(x) = \sum_{\|n\|>N} c_n \begin{pmatrix} v_{n,1}(x) \\ v_{n,2}(x) \end{pmatrix}.$$

Используя лемму 2.6 и асимптотику собственных функций (2.21), (2.21), получим

$$\begin{aligned} \sum_{|n|>N} c_n v_{n,1}(x) &= (\cos \alpha - \sin \alpha) \sum_{|n|>N} \left(\frac{\cos(\xi_n - \alpha)}{\lambda_n} + \alpha_n \right) = \\ &= (\cos \alpha - \sin \alpha) \sum_{|n|>N} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}n(x+1) + \varphi(x))}{\pi n/2} + \alpha_n \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\varphi(x) = -\frac{\theta}{2}(x+1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau - \alpha.$$

Из (2.25) следует, что

$$\begin{aligned} D_N(\kappa) &= \kappa(x) - \sum_{|n|>N} \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\pi n/2} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}n(x+1) + \varphi(x)) \\ \sin(\frac{\pi}{2}n(x+1) + \varphi(x)) \end{pmatrix} + o(1) = \\ &= \kappa(x) - \frac{2(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(x)) \\ \cos(\varphi(x)) \end{pmatrix} \sum_{|n|>N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n(x+1))}{n} + o(1). \end{aligned}$$

Функция φ непрерывна, а сумма $\sum_{|n|>N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n(x+1))}{n}$ является остаточной суммой ряда Фурье для функции $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n(x+1))}{n} = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-1, 1]. \quad (2.26)$$

Разделим интервал $(-1, 1]$ на две части $(-1, \xi]$, $(\xi, 1]$ так, что бы на интервале $(-1, \xi]$ выполнялась оценка $|\varphi(x) - \varphi(-1)| < \epsilon$, а на интервале $(\xi, 1]$ - оценка $|\kappa(x) - D_N(\kappa)| < \epsilon$, для достаточно больших N . Тогда, получим:

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{N \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -1}} |BC(D_N(\kappa), x, \alpha)| &= |BC(\kappa, -1, \alpha)| - \\ &= \frac{|BC(\kappa, -1, \alpha)|}{\pi} \limsup_{\substack{N \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -1}} \sum_{|n|>N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n(x+1))}{n}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из формул (2.27) и (2.26) получим желаемый результат.

Заметим, что величина $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.17898$ это константа классического явления Гиббса для рядов Фурье.

Заметим также, что если $\alpha = 0$, то одна компонента в разложении (2.24) сходится равномерно, а другая ведет к явлению Гиббса. Для иллюстрации этого явления рассмотрим систему с нулевым потенциалом, и пусть $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$. Для этой задачи легко можно вычислить собственные значения и собственные функции: а именно

$$\lambda_n = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а нормированные собственные вектор функции имеют вид

$$v_n(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \cos\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) \cot\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) \\ \cos\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) + \cot\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) \end{pmatrix}.$$

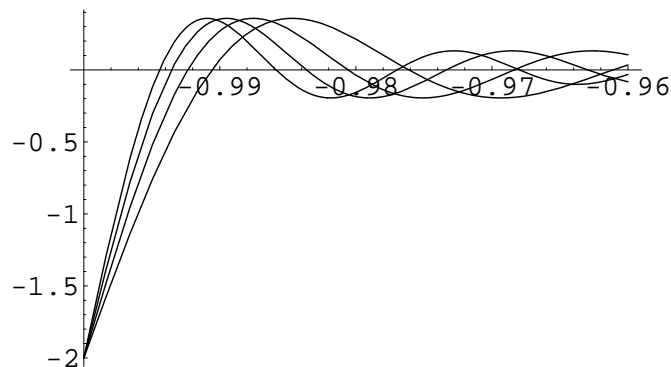


Рис. 2.2: Ошибка приближения второй компоненты функции $\kappa(x)$ конечной суммой ряда Фурье с использованием 100, 130, 160, 190 коэффициентов Фурье

Рисунок 2.2 хорошо иллюстрирует отсутствие явления Гиббса для второй компоненты функции (2.23) в точке -1 .

Рисунок 2.3 иллюстрирует, что для второй компоненты налицо явление Гиббса, частичная сумма ряда Фурье сходится равномерно для первой компоненты функции (2.23). Оба графика построены на отрезке $[-1, -0.96]$.

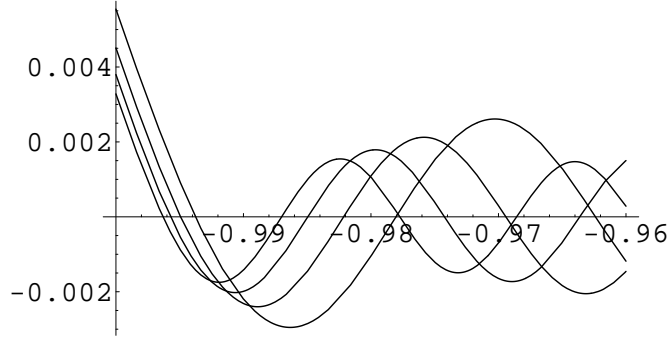


Рис. 2.3: Ошибка приближения первой компоненты функции $\kappa(x)$ конечной суммой ряда Фурье, при $N = 100, 130, 160, 190$ коэффициентов Фурье (ошибка уменьшается с ростом N).

Аналогичный результат можно получить для функции

$$\varrho(x) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ -x - 1 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

которая имеет сингулярность в точке 1.

Если $p, r \in C^1[-1, 1]$ и функция ϱ определена в (2.28), тогда при $\beta \neq \frac{\pi}{4}$ имеет место явление Гиббса, а именно

$$\limsup_{\substack{N \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 1}} \frac{|BC(D_N(\varrho), x, \beta)|}{|BC(\varrho, 1, \beta)|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Отсюда получена следующий общий результат

Теорема 2.2 Пусть $p, r \in C^1[-1, 1]$, $f \in C_2^1[-1, 1]$ и функция f не удовлетворяет краевым условиям ($BC(f, -1, \alpha) \neq 0$, $BC(f, 1, \beta) \neq 0$) тогда при $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{4}$ в точках $\{-1, 1\}$ имеет место явления Гиббса

$$\limsup_{\substack{N \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 1}} \frac{|BC(D_N(f), x, \beta)|}{|BC(f, 1, \beta)|} = \limsup_{\substack{N \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -1}} \frac{|BC(D_N(f), x, \alpha)|}{|BC(f, -1, \alpha)|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt,$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - h\kappa(x) - H\varrho(x)$, где

$$h = \frac{f_2(-1) \cos \alpha + f_1(-1) \sin \alpha}{\kappa_2(-1) \cos \alpha + \kappa_1(-1) \sin \alpha}, \quad H = \frac{f_2(1) \cos \alpha + f_1(1) \sin \alpha}{\varrho_2(1) \cos \alpha + \varrho_1(1) \sin \alpha}.$$

Функция $g(x)$ будет удовлетворять краевым условиям и имеет непрерывную первую производную, следовательно ряд $D_N(f(x) - h\kappa(x) - H\varrho(x))$ сходится равномерно, что и доказывает утверждение теоремы. \square

2.2.4 Обобщение полиномиального метода для системы Дирака

Используя лемму 2.4, функцию f можно представить в виде $f(x) = P(x) + Q(x)$, где

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n v_n(x), \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n v_n(x).$$

Рассмотрим теперь функции

$$G_k(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{k!} \frac{d^k G(x, \xi, \lambda)}{d\lambda^k}, \quad k \geq 0.$$

Дифференцируя (2.16) по λ , получим

$$G_k(x, \xi, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n^T(\xi)}{(\lambda_n - \lambda)^{k+1}}. \quad (2.29)$$

Из (2.19) и (2.29) получим явный вид функции $P(x)$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \left(G_k(x, 1, 0) \tilde{f}_k(1) - G_k(x, -1, 0) \tilde{f}_k(-1) \right)$$

Обозначим теперь

$$D_{q,N}(f) = D_N(F) + \sum_{k=0}^{q-1} \left(G_k(x, 1, 0) \tilde{f}_k(1) - G_k(x, -1, 0) \tilde{f}_k(-1) \right)$$

$$DR_{q,N}(f) = f(x) - D_{q,N}(f)$$

Теорема 2.3 Пусть $q \geq 1$, $p, r \in C^{q-1}[-1, 1]$, $p^{(q-1)}, r^{(q-1)} \in AC[-1, 1]$, $f \in C_2^q[-1, 1]$ и $f^{(q)} \in AC_2[-1, 1]$. Тогда

$$DR_{q,N}(f) = o(N^{-q+1}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Из (2.18) имеем

$$DR_{q,N}(f) = F(x) - D_N(F) = \sum_{|n|>N} F_n v_n(x)$$

Обозначим $g(x) = L^q(f(x))$, тогда из леммы 2.4

$$F_n = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 v_n^T(x) g(x) dx = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 (v_{n,1}(x) g_1(x) + v_{n,2}(x) g_2(x)) dx, \quad n \rightarrow \infty$$

Используя асимптотику (2.21) и (2.22) собственных вектор функций, получим

$$F_n = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 \cos(\xi(n, x) - \alpha) \frac{g_1(x)}{\sqrt{2}} dx + \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 \sin(\xi(n, x) - \alpha) \frac{g_2(x)}{\sqrt{2}} dx + \lambda_n^{-q} O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Элементарными преобразованиями получаем

$$\begin{aligned} \cos(\xi(n, x) - \alpha) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}n(x+1) - \frac{\theta}{2}(x+1) + O(n^{-1})(x+1) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \int_{-1}^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau - \alpha\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}n(x+1)\right) \eta(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}n(x+1)\right) \gamma(x) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где η, γ некоторые непрерывные функции. Аналогичную формулу можно получить для $\sin(\xi(n, x) - \alpha)$. Используя теорему Римана-Лебега, получим, что интеграл в правой части представления F_n имеет порядок

$$F_n = o(n^{-q}), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

Учитывая тот факт, что система собственных вектор-функций равномерно ограничена на отрезке $[-1, 1]$, получим желаемый результат. \square

Теорема 2.4 Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+1/2} \|DR_{q,N}(f)\|_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q+1} \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{2q+1}},$$

где

$$C_1 = \tilde{f}_{q,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{q,2}(1) \sin \beta,$$

$$C_2 = \tilde{f}_{q,2}(-1) \cos \alpha - \tilde{f}_{q,1}(-1) \sin \alpha.$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля, из (2.18) получим

$$\|DR_{q,N}(f)\|_2^2 = \|f(x) - D_{q,N}(f)\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |c_n - P_n|^2. \quad (2.31)$$

Из леммы 2.4 и (2.30) имеем

$$c_n - P_n = \lambda_n^{-q-1} v_n^T(1) \tilde{f}_q(1) - \lambda_n^{-q-1} v_n^T(-1) \tilde{f}_q(-1) + o(n^{-q-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставляя последнее равенство в (2.31) и используя асимптотические формулы (2.20)-(2.22), получим

$$\begin{aligned} \|DR_{q,N}(f)\|_2^2 &= \sum_{|n|>N} \left| \frac{v_n^T(1) \tilde{f}_q(1) - v_n^T(-1) \tilde{f}_q(-1)}{\lambda_n^{q+1}} + o(n^{-q-1}) \right|^2 = \\ &= \sum_{|n|>N} \left| \frac{v_{n,1}(1) \tilde{f}_{q,1}(1) + v_{n,2}(1) \tilde{f}_{q,2}(1) - v_{n,1}(-1) \tilde{f}_{q,1}(-1) - v_{n,2}(-1) \tilde{f}_{q,2}(-1)}{(\pi n/2 - \theta + O(n^{-1}))^{q+1}} + \right. \\ &\quad \left. o(n^{-q-1}) \right|^2 = \sum_{|n|>N} \left| \frac{(-1)^n A - B}{\sqrt{2} (\pi n/2 - \theta)^{q+1}} \right|^2 + o(N^{-2q-1}), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

С другой стороны имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n - \theta)^{2q+2}} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n/N - \theta/N)^{2q+2}} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2q+2}} dx = \frac{1}{2q+1}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - \theta)^{2q+2}} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} \left(\sum_{m=[(N+1)/2]}^{\infty} \frac{1}{(2m - \theta)^{2q+2}} - \sum_{m=[N/2]}^{\infty} \frac{1}{(2m + 1 - \theta)^{2q+2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Используя последние пределы, получим требуемое. \square

Теорема 2.4 фактически содержит оценку скорости сходимости ускорения разложения $D_N(f)$ Назовем этот подход методом КЕГ-D.

2.2.5 Обобщение квазиполиномиального метода для системы Дирака

Рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\eta = \{\eta_k\}_{k=1}^m$, $\theta = \{\theta_k\}_{k=1}^m$ и введем обозначения

$$\Delta_k^0(\eta, A) = A_k, \quad \Delta_k^l(\eta, A) = \Delta_k^{l-1}(\eta, A) + \eta_l \Delta_{k-1}^{l-1}(\eta, A), \quad (2.32)$$

$$\Delta_k^0(\theta, B) = B_k, \quad \Delta_k^l(\theta, B) = \Delta_k^{l-1}(\theta, B) + \theta_l \Delta_{k-1}^{l-1}(\theta, B). \quad (2.33)$$

где

$$A = \{A_k\} = \{\tilde{f}_{k,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{k,2}(1) \sin \beta\},$$

$$B = \{B_k\} = \{\tilde{f}_{k,1}(-1) \cos \alpha - \tilde{f}_{k,2}(-1) \sin \alpha\}.$$

Лемма 2.7 Пусть $q \geq 1$, $m \geq 1$ и выполнены условия теоремы 2.3. Тогда для коэффициентов c_n , определенных в (2.17), имеет место следующее представление:

$$c_n = Q_n + H_n,$$

где

$$Q_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos \beta} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_n^{m-k-1} \Delta_k^m(\eta, A)}{\prod_{s=1}^m (\lambda_n + \eta_s)} - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos \alpha} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_n^{m-k-1} \Delta_k^m(\theta, B)}{\prod_{s=1}^m (\lambda_n + \theta_s)}, \quad (2.34)$$

$$H_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos \beta \lambda_n^{q+1}} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_n^k \eta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\eta, A)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \eta_s)} - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos \alpha \lambda_n^{q+1}} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_n^k \theta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\theta, B)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \theta_s)} + F_n, \quad (2.35)$$

$$F_n = \lambda_n^{-q} \int_{-1}^1 v_n^T(x) L^q(f(x)) dx.$$

Доказательство. Легко можно проверить следующее равенство

$$\sum_{k=0}^{q-1} A_k x^k = x^q \frac{A_{q-1} \eta_1}{1 + \eta_1 x} + \frac{1}{1 + \eta_1 x} \sum_{k=0}^{q-1} (A_k + \eta_1 A_{k-1}) x^k. \quad (2.36)$$

Повторяя преобразование (2.36) для последнего слагаемого m раз ($m \leq q-1$) получим

$$\sum_{k=0}^{q-1} A_k x^k = x^q \sum_{k=1}^m \frac{\eta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\eta, A)}{\prod_{s=1}^k (1 + \eta_s x)} + \frac{1}{\prod_{s=1}^m (1 + \eta_s x)} \sum_{k=0}^{q-1} \Delta_k^m(\eta) x^k. \quad (2.37)$$

Обозначим $x = \lambda_n^{-1}$ и преобразуем представление (2.19)

$$P_n = v_{n,1}(1) \sum_{k=0}^{q-1} x^{k+1} A_k - v_{n,1}(-1) \sum_{k=0}^{q-1} x^{k+1} B_k$$

Применяя аналогичное преобразование к P_n , получим желаемый результат. \square

Пользуясь леммой 2.7, данную функции $f \in C_2^q[-1, 1]$ можно разделить на слагаемые

$f(x) = Q(x) + H(x)$, где

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n v_n(x), \quad H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n v_n(x).$$

Отсюда получим формулу ускорения сходимости в следующем виде

$$D_{m,q,N}(f) = Q(x) + \sum_{n=-N}^N H_n v_n(x). \quad (2.38)$$

$$DR_{m,q,N}(f) = f(x) - D_{m,q,N}.$$

Если последовательность η и θ определить из систем

$$\Delta_k^m(\eta, A) = 0, \quad k = q - m, \dots, q - 1, \quad (2.39)$$

$$\Delta_k^m(\theta, B) = 0, \quad k = q - m, \dots, q - 1, \quad (2.40)$$

то фактически получится, что мы применили аппроксиманты Паде по отдельности к слагаемым относительно векторной суммы (2.19). Вышеизложенное для разложения по системе v_n есть обобщение идеи, предложенной в работе [25] в случае ряда Фурье.

Теорема 2.5 Пусть выполнены условия теоремы 2.3, $q - 1 \geq m \geq 1$ и последовательности θ, η удовлетворяют равенствам (2.39) и (2.40). Тогда

$$DR_{m,q,N}(f)(f) = o(N^{-q}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Коэффициенты H_n имеют порядок $o(n^{-q-1})$. Остальное аналогично доказательству теоремы 2.3. \square

Обозначим теперь $U_r^m = (A_{k-s+r})_{k,s=1}^m$ и $V_r^m = (B_{k-s+r})_{k,s=1}^m$

Лемма 2.8 Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и $\det U_{q-m-1}^m \neq 0$, тогда

$$\Delta_q^m(\eta, A) = (-1)^{m+1} \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Delta_k^m(\eta) = \sum_{s=0}^m \gamma_s A_{k-s},$$

где γ_s коэффициенты полинома $\prod_{k=1}^m (1 + \eta_k x) = \sum_{k=0}^m x^k$. Используя систему (2.39) коэффициенты γ_s можно определить из следующих уравнений

$$A_{k+q-m} + \sum_{s=1}^m \gamma_s A_{k-s+q-m} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

По формуле Крамера получим $\gamma_s = \frac{M_s}{\det U_{q-m}^m}$, где M_s соответствующие определители.

Следовательно

$$\Delta_k^m(\eta) = A_{q+1} + \frac{1}{\det U_{q-m}^m} \sum_{s=1}^m M_s A_{q+1-s}.$$

Разложив теперь определитель $\det U_{q-m+1}^{m+1}$ по последней строке, получим желаемый результат. \square

L_2^2 -ошибка характеризуется точной оценкой

Теорема 2.6 Пусть выполнены условия теоремы 2.3, $\det U_{q-m-1}^m \neq 0$, $q-1 \geq m \geq 1$ и последовательности θ, η удовлетворяют равенствам (2.39) и (2.40). Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{q+1/2} \|DR_{m,q,N}(f)\|_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q+1} \sqrt{\frac{C_3^2 + C_4^2}{2q+1}},$$

где

$$C_3 = \frac{\det U_{q-m}^{m+1}}{\det U_{q-m-1}^m}, \quad C_4 = \frac{\det V_{q-m}^{m+1}}{\det V_{q-m-1}^m}.$$

Доказательство. Из уравнения (2.38)

$$DR_{m,q,N}(f) = \sum_{|n|>N} H_n v_n(x).$$

Интегрируя по частям уравнение (2.35), получим

$$H_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos \beta \lambda_n^{q+1}} \left(A_q + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_n^k \eta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\eta, A)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \eta_s)} \right) - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos \alpha \lambda_n^{q+1}} \left(A_q + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_n^k \theta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\theta, B)}{\prod_{s=1}^k (\lambda_n + \theta_s)} \right) + o(n^{-q-1}).$$

Используя обозначения (2.32), придем к представлению

$$\begin{aligned} \Delta_q^m(\eta, A) &= \Delta_q^{m-1}(\eta, A) + \eta_m \Delta_{q-1}^{m-1}(\eta, A) = \Delta_q^{m-2}(\eta, A) + \\ &\quad \eta_{m-1} \Delta_{q-1}^{m-2}(\eta, A) + \eta_m \Delta_{q-1}^{m-1}(\eta, A) = A_q + \sum_{k=1}^m \eta_k \Delta_{q-1}^{k-1}(\eta, A). \end{aligned}$$

И следовательно

$$DR_{m,q,N}(f) = \frac{\Delta_q^m(\eta, A)}{\cos \beta} \sum_{|n|>N} \frac{v_{n,1}(1)v_n(x)}{\lambda_n^{q+1}} + \frac{\Delta_q^m(\theta, B)}{\cos \alpha} \sum_{|n|>N} \frac{v_{n,1}(-1)v_n(x)}{\lambda_n^{q+1}} + o(N^{-q}), \quad N \rightarrow \infty$$

Теперь с помощью асимптотики собственных значений и собственных функций (2.20)-(2.22) и, с другой стороны, используя формулу

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2q+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{2q+2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n/N)^{2q+2}} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2q+2}} dx = \frac{1}{2q+1},$$

получим желаемый результат. \square

В прикладных задачах функция $f(x)$ не известна, а известны только первые N коэффициентов Фурье. Для практического применения вышеуказанного алгоритма нам надо знать значения \tilde{f}_k в точках -1 и 1 . Заметим, что достаточно вычислить не сами значения \tilde{f}_k , а суммы их компонент $\{A_k = \tilde{f}_{k,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{k,2}(1) \sin \beta, B_k = \tilde{f}_{k,1}(-1) \cos \alpha - \tilde{f}_{k,2}(-1) \sin \alpha\}$, так как

$$G(x, 1, \lambda) \tilde{f}_k(1) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) (\tilde{f}_{k,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{k,2}(1) \sin \beta) \\ \varphi_2(x, \lambda) (\tilde{f}_{k,1}(1) \cos \beta - \tilde{f}_{k,2}(1) \sin \beta) \end{pmatrix},$$

очевидно, что $G(x, 1, \lambda) \tilde{f}_k(1)$, а также ее производные тоже зависят от коэффициентов $\{A_k, B_k\}$.

Используя представление $c_n = P_n + F_n$ и то, что $F_n = o(n^{-q})$, $n \rightarrow \infty$ приближенные значения $\{\tilde{A}_k, \tilde{B}_k\}$ можно вычислить из системы

$$c_n = \frac{v_{n,1}(1)}{\cos \beta} \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_n^{-k-1} \tilde{A}_k - \frac{v_{n,1}(-1)}{\cos \alpha} \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_n^{-k-1} \tilde{B}_k, \quad n = n_1, n_2 \dots n_{2q}.$$

Представим эту систему в следующей форме

$$c_{n_s} \lambda_{n_s} = \alpha_s \sum_{k=0}^{q-1} x_s^k \tilde{A}_k + \beta_s \sum_{k=0}^{q-1} x_s^k \tilde{B}_k, \quad s = 1, \dots, q, \quad (2.41)$$

где

$$x_s = \lambda_{n_s}^{-1}, \quad s = 1, \dots, q,$$

$$\alpha_s = \frac{v_{n_s,1}(1)}{\cos \beta},$$

$$\beta_s = -\frac{v_{n_s,1}(-1)}{\cos \alpha}.$$

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 x_1 & \dots & \alpha_1 x_1^{q-1} & \beta_1 & \beta_1 x_1 & \dots & \beta_1 x_1^{q-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2 x_2 & \dots & \alpha_2 x_2^{q-1} & \beta_2 & \beta_2 x_2 & \dots & \beta_2 x_2^{q-1} \\ \alpha_3 & \alpha_3 x_3 & \dots & \alpha_3 x_3^{q-1} & \beta_2 & \beta_3 x_3 & \dots & \beta_3 x_3^{q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2q} & \alpha_{2q} x_{2q} & \dots & \alpha_{2q} x_{2q}^{q-1} & \beta_{2q} & \beta_{2q} x_{2q} & \dots & \beta_{2q} x_{2q}^{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_0 \\ \vdots \\ \tilde{A}_{q-1} \\ \tilde{B}_0 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}.$$

Детерминант матрицы на левой стороне, на отличие от случая разложения по классическому ряду Фурье, является блочной матрицей Вандермонда, а не классической и соответствующая система может быть не разрешенной. Однако асимптотическая разрешимость имеет место.

Лемма 2.9 Пусть выполнены условия теоремы 2.3, индексы $\{n_s = n_s(N)\}$ выбраны так, что $n_i \neq n_j$ если $i \neq j$ и количество четных и нечетных индексов равны, тогда начиная с некоторого N , система (2.41) разрешима.

Доказательство. Из асимптотики собственных функций (2.21)-(2.22) имеем

$$\alpha_s = (-1)^{n_s} + O(n^{-1}), \quad \beta_s = -1 + O(n^{-1}).$$

Без ограничения общности будем считать что $n_{2s} \equiv 2$ и $(n_{2s+1} - 1) \equiv 2$. После перестановки столбцов матрица получим

$$\Xi_q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -x_1 & x_1 & \dots & -x_1^{q-1} & x_1^{q-1} \\ 1 & 1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2^{q-1} & x_2^{q-1} \\ -1 & 1 & -x_3 & x_3 & \dots & -x_3^{q-1} & x_3^{q-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -x_{2q-1} & x_{2q-1} & \dots & -x_{2q-1}^{q-1} & x_{2q-1}^{q-1} \\ 1 & 1 & x_{2q} & x_{2q} & \dots & x_{2q}^{q-1} & x_{2q}^{q-1} \end{pmatrix}$$

Если в последней матрице из строк с нечетными индексами вычесть предпоследнюю, а из строк с четными индексами вычесть последнюю строку, получим

$$\det(\Xi_q) = 2(-1)^{q-1} \prod_{k=1}^{q-1} (x_{2q-1} - x_{2k-1}) \prod_{k=1}^{q-1} (x_{2q} - x_{2k}) \det(\Xi_{q-1}), n \gg 1.$$

Так как $\det(\Xi_1) \neq 0$, по индукции получим желаемый результат. \square

Формальный алгоритм QR-D ускорения сходимости описывается следующим образом

- Заданы собственные значения $\{\lambda_n\}$, собственные вектор-функции $\{v_n\}$ $\{\lambda_n\}$, $|n| \leq N$ и коэффициенты $\{c_n\}$ при $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, $N \gg 1$.
- Вычислим значения $\{\tilde{A}_k, \tilde{B}_k\}$, как описано выше
- Задавшись числом q , рассмотрим систему (2.39), (2.40). Если обозначить $\sigma_1 = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_m$, $\sigma_2 = \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \dots + \eta_{m-1}\eta_m$, \dots , $\sigma_m = \eta_1\eta_2 \dots \eta_m$, то система (2.39) будет системой линейных уравнений относительно $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Используя обобщенную теорему Виета, можно показать, что $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ являются корнями полинома с коэффициентами $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Аналогичным образом можно решить уравнение (2.40).
- Вычислим теперь функцию $Q(x)$. Так как коэффициенты Фурье Q_n функции $Q(x)$ являются рациональными функциями относительно λ_n (2.34), их можно представить в виде суммы простых дробей. Таким образом, функцию $Q(x)$ можно представить явно, как линейную комбинацию функций $G_k(x, \xi, \lambda)$ при значениях $\lambda \in \eta$ и $\lambda \in \theta$.
- Функцию Грина и ее производные при конкретных ξ и λ вычислим согласно формуле (2.16), а при этом фундаментальная система легко вычисляется решением соответствующей задачи Коши.

- Придем к формуле ускорения сходимости

$$D_{m,q,N}(f) = Q(x) + \sum_{-N}^N F_n v_n,$$

где $F_n = c_n - Q_n$.

2.2.6 Численные результаты

В качестве первого примера рассмотрим краевую задачу

$$y_2'(x) - (\lambda + \cos x)y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) + (\lambda + \cos x)y_2(x) = 0. \quad (2.42)$$

$$y_1(-1) - y_2(-1) = 0, \quad (2.43)$$

$$y_1(1) - y_2(1) = 0. \quad (2.44)$$

Общее решение системы (2.42) нетрудно вычислить явно

$$y_1(x) = c_2 \cos(x\lambda + \sin x) - c_1 \sin(x\lambda + \sin x),$$

$$y_2(x) = c_1 \cos(x\lambda + \sin x) + c_2 \sin(x\lambda + \sin x),$$

где c_1, c_2 произвольные постоянные.

Определитель Вронского в данном случае ($\alpha = -\pi/4, \beta = -\pi/4$) имеет вид

$$\omega(\lambda) = -\sin(2\lambda + 2\sin(1)).$$

Ясно, что собственные значения краевой задачи (2.42)- (2.44) определяются формулой

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2}n - \sin(1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а нормированные собственные вектор функции имеют вид

$$v_n(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n \cos(\lambda_n x + \sin x) - \sin(\lambda_n x + \sin x) \\ \cos(\lambda_n x + \sin x) + (-1)^n \sin(\lambda_n x + \sin x) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рассмотрим теперь тестовую вектор функцию

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin(7x + 1) \\ \cos(1.1x + 0.2) \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

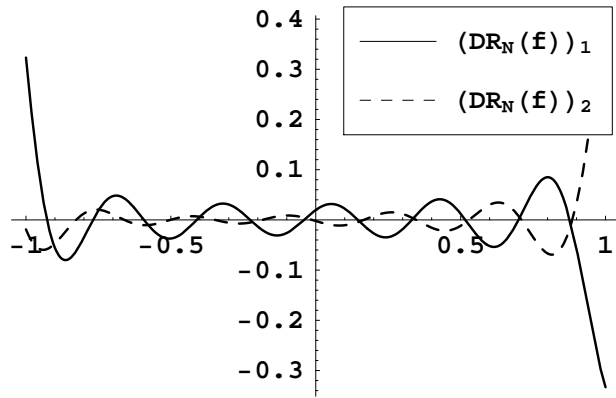


Рис. 2.4: Ошибка при приближении функции (2.45) конечной суммой ряда Фурье с помощью 10 коэффициентов Фурье ($N = 10$)

На рисунке 2.4 изображено приближение функции прямым суммированием ряда Фурье. Очевидно, что в данном случае ряд Фурье не будет равномерно сходящимся, так как $f_1(-1) \neq f_2(-1)$, $f_1(1) \neq f_2(1)$, и налицо явление Гиббса.

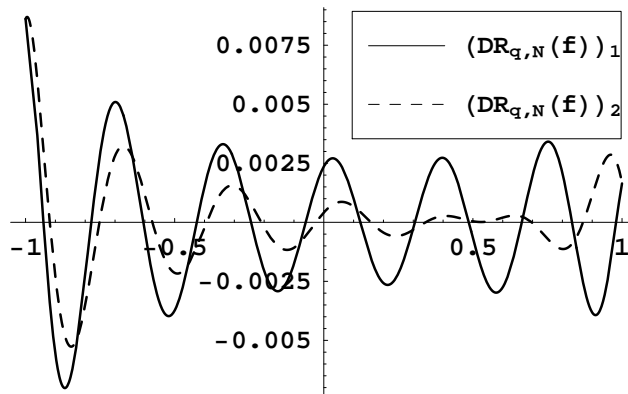


Рис. 2.5: Ошибка при приближении функции (2.45) методом KEG-D при $N = 10$ и $q = 3$

Рисунок 2.5 иллюстрирует ускорение сходимости алгоритма KEG-D. Как видим равномерная ошибка приближения в последнем случае на 2 порядка меньше, хотя использованы те же коэффициенты разложения.

На таблице 2.1 приведены равномерная и L_2^2 ошибка при приближении функции (2.45) методом KEG-D для $q = 2$ и $q = 3$. Эти и другие численные результаты хорошо согласуются с теоретическими результатами, полученными в теоремах 2.3 и 2.4.

N	10	20	40	80	160
$\ DR_{2,N}(f)\ _\infty$	0.026	0.0064	0.0016	4.1×10^{-4}	9.9×10^{-5}
$\ DR_{2,N}(f)\ _2$	0.014	0.0023	4.1×10^{-4}	7.3×10^{-5}	1.2×10^{-5}
$\ DR_{3,N}(f)\ _\infty$	0.009	0.0011	0.00014	1.8×10^{-5}	2.2×10^{-6}
$\ DR_{3,N}(f)\ _2$	0.004	4.0×10^{-4}	3.6×10^{-5}	3.3×10^{-6}	2.9×10^{-7}

Таблица 2.1: Равномерная и L_2^2 ошибка приближения функции (2.45) методом КЕГ-D для $q = 2$ и $q = 3$

Рассмотрим теперь другой пример.

$$y_2'(x) - (\lambda + \cosh x)y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) + (\lambda + \cosh x)y_2(x) = 0, \quad (2.46)$$

$$y_1(-1) - y_2(-1) = 0, \quad (2.47)$$

$$y_1(1) - y_2(1) = 0. \quad (2.48)$$

Легко вычислить собственные значения и собственные функции задачи (2.46) - (2.48):

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2}n - \sinh(1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$v_n(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n \cos(\lambda_n x + \sinh x) - \sin(\lambda_n x + \sinh x) \\ \cos(\lambda_n x + \sinh x) + (-1)^n \sin(\lambda_n x + \sinh x) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Теперь рассмотрим тестовую вектор функцию

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin(x + 0.1) \\ J_1(x) \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

где $J_1(x)$ функция Бесселя.

Рисунок 2.6 иллюстрирует ошибку приближения функции (2.49) усеченным рядом в близи точек -1 и 1 .

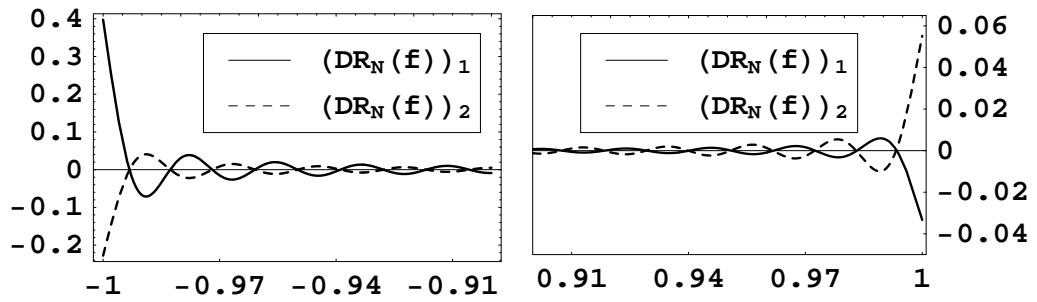


Рис. 2.6: Ошибка приближения $DR_N(f) = D_N(f) - f(x)$ усеченным рядом Фурье ($N = 180$).

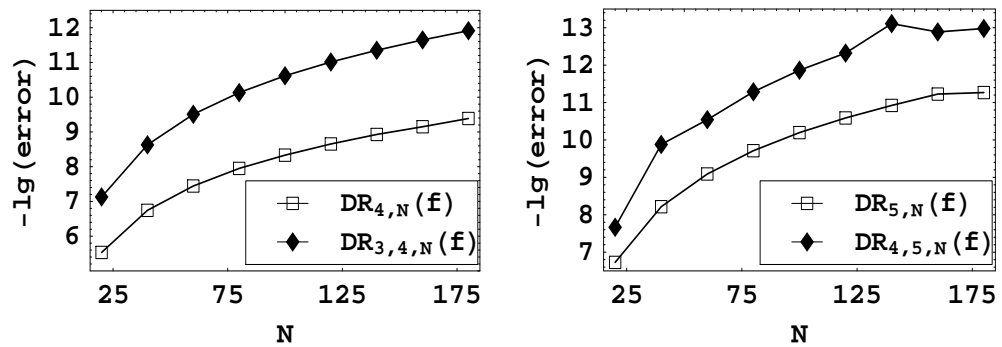


Рис. 2.7: Десятичные логарифмы обратных величин равномерных ошибок при аппроксимации методами KEG-D и QR-D.

Указан порядок равномерной ошибки аппроксимации функции (2.49) методами KEG-D и QR-D для разных значений N . Левая часть соответствует случаю $q = 4, m = 3$, а правая - $q = 5, m = 4$.

Заключение

Резюмируя сказанное, можно отметить, что в диссертационной работе получены следующие результаты:

- В первой главе диссертации дополняются некоторые результаты ранее известных работ, связанных с ускорением сходимости классического ряда Фурье. В частности, получены точные асимптотические оценки КЕГ и QR - методов, изучена зависимость ошибки приближенного определения скачков от выбора индексов $\{n_s\}$ в системе (0.9).
- Рассмотрена модельная граничная задача

$$i \frac{du}{dx} = \lambda \varepsilon(x) u(x), \quad u(-1) = u(1). \quad (2.50)$$

с разрывным коэффициентом (весом) $\varepsilon(x)$. Для разложения по собственным функциям этой задачи построены алгоритмы ускорения сходимости.

- Рассмотрена граничная задача для одномерной системы Дирака,

$$y_2'(x) - (\lambda + p(x))y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) + (\lambda + r(x))y_2(x) = 0, \quad (2.51)$$

$$y_2(-1) \cos \alpha + y_1(-1) \sin \alpha = 0, \quad (2.52)$$

$$y_2(1) \cos \beta + y_1(1) \sin \beta = 0. \quad (2.53)$$

Для функции из класса $f \in C_2^1[-1, 1]$ показано, что существует явление подобное явлению Гиббса для классического ряда Фурье.

Результаты, относящиеся к системе Дирака, позволяют в полном объеме решить задачу ускорения сходимости рассмотренных разложений Фурье-Дирака, для гладких на отрезке $[-1, 1]$ функции включая как теоретические оценки сходимости,

так и конструктивное обоснование алгоритмов реализации методов КЕГ-Д и QR-D. Аналогично случаю рядов Фурье (см. [25]), из представления функции Грина (2.16) следует, что метод QR-D позволяет выявлять скрытые осцилляционные свойства компонентов разлагаемой функции.

- Практическая эффективность разработанных алгоритмов подтверждается численными экспериментами, проведенными применением системы МАТЕМАТИКА. Два примера этих экспериментов, приведенные в работе, подтверждают это в случае явных видов собственных функций и собственных значений.

Литература

- [1] A. Zygmund. *Trigonometric Series. Vol. 1,2.* Cambridge Univ. Press, 1959.
- [2] Б. Кашин and А Саакян. *Ортогональные ряды.* АФЦ, Москва, 1999.
- [3] А. Крылов. *О приближенных вычислениях.* Лекции читанные в 1906 г. СПб. Типолитогр. К. Биркенфельда, 1907.
- [4] C. Lanczos. *Discourse on Fourier Series.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966.
- [5] C. Lanczos. Evaluation of noisy data. *J. Soc. Indust. Appl. Math., Ser. B Numer. Anal.*, 1:76–85, 1964.
- [6] C. Lanczos. *Applied analysis.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1956.
- [7] J. N. Lyness. Computational techniques based on the Lanczos representation. *Math. Comp.*, 28:81–123, 1974.
- [8] P. Lax. Accuracy and resolution in the computation of solutions of linear and nonlinear equations. In *Recent advances in numerical analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1978)*, volume 41 of *Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin*, pages 107–117. Academic Press, New York, 1978.
- [9] W. B. Jones and G. Hardy. Accelerating convergence of trigonometric approximations. *Math. Comp.*, 24:47–60, 1970.
- [10] A. Nersessian and A. Poghosyan. On a rational linear approximation of Fourier series for smooth functions. *Journal of Scientific Computing*, 26(1):111–125, 2006.
- [11] K. S. Eckhoff. Accurate and efficient reconstruction of discontinuous functions from truncated series expansions. *Math. Comp.*, 61:745–763, 1993.
- [12] K. S. Eckhoff. Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions. *Math. Comp.*, 64:671–690, 1995.
- [13] K. S. Eckhoff. On a high order numerical method for functions with singularities. *Math. Comp.*, 67:1063–1087, 1998.

- [14] C. E. Wasberg. *On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method*. PhD thesis, Department of Mathematics. University of Bergen. Norway, 1996.
- [15] D. Gottlieb. Spectral methods for compressible flow problems. In *Ninth international conference on numerical methods in fluid dynamics (Saclay, 1984)*, volume 218 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 48–61. Springer, Berlin, 1985.
- [16] D. Gottlieb. Issues in the application of high order schemes. In *Algorithmic trends in computational fluid dynamics (1991)*, ICASE/NASA LaRC Ser., pages 195–218. Springer, New York, 1993.
- [17] D. Gottlieb, L. Lustman, and S. A. Orszag. Spectral calculations of one-dimensional inviscid compressible flows. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 2:296–310, 1981.
- [18] D. Gottlieb, C.-W. Shu, A. Solomonoff, and H. Vandeven. On the Gibbs phenomenon. I. Recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a nonperiodic analytic function. *J. Comput. Appl. Math.*, 43(1-2):81–98, 1992. Orthogonal polynomials and numerical methods.
- [19] D. Gottlieb and C.-W. Shu. On the Gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM Rev.*, 39(4):644–668, 1997.
- [20] D. Gottlieb and C.-W. Shu. On the Gibbs phenomenon. III. Recovering exponential accuracy in a sub-interval from a spectral partial sum of a piecewise analytic function. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):280–290, 1996.
- [21] D. Gottlieb and C.-W. Shu. On the Gibbs phenomenon. IV. Recovering exponential accuracy in a subinterval from a Gegenbauer partial sum of a piecewise analytic function. *Math. Comp.*, 64(211):1081–1095, 1995.
- [22] D. Gottlieb and C.-W. Shu. On the Gibbs phenomenon. V. Recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function. *Numer. Math.*, 71(4):511–526, 1995.
- [23] W. Cai, D. Gottlieb, and C. W. Shu. Essentially non oscillatory spectral Fourier methods for shock wave calculations. *Math. Comp.*, 52:389–410, 1989.

- [24] G. Baszenski, F.-J. Delvos, and M. Tasche. A united approach to accelerating trigonometric expansions. *Computers Math. Applic.*, 30(3-6):33–49, 1995.
- [25] А. Нерсесян. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций. *Доклады НАН Армении*, 104(4):186–191, 2004.
- [26] A. Nersessian and A. Poghosyan. Accelerating the convergence of trigonometric series. *Cent. Eur. J. Math.*, 4(3):435–448, 2006.
- [27] А. Нерсесян. Ускоренная сходимость разложений по собственным функциям одномерных граничных задач. *Математика в высшей школе, научно методичный сборник*, 2:47–63, 2005.
- [28] A. Nersessian and A. Poghosyan. Bernoulli method in multidimensional case. *Preprint No20 Ar-00 (in Russian) Deposited in ArmNIINTI 09.03.00*, pages 1–40, 2000.
- [29] A. Nersessian and A. Poghosyan. Asymptotic errors of accelerated two-dimensional trigonometric approximations. In *Proceedings of the ISAAC fourth Conference on Analysis (Yerevan 2004)*, pages 70–78. 2004.
- [30] G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris. *Padé approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.
- [31] М. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2-е*. Наука Москва, 1969.
- [32] Э. Камке. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Физматгиз, Москва, 1961.
- [33] E. C. Titchmarsh. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations part 1*. Clarendon, Oxford, 1962.
- [34] E. C. Titchmarsh. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations part 2*. Clarendon, Oxford, 1962.
- [35] Б. М. Левитан. *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка*. М. Л., 1950.
- [36] J. Shaw, L. Johnson, and R. Riess. Accelerating convergence of eigenfunction

- expansions. *Math. Comp.*, 30(3):769–477, 1976.
- [37] А. Нерсисян. Ускорение сходимости рядов Фурье-Бесселя для кусочно-гладких функций. *Доклады НАН Армении*, 105(1):28–35, 2005.
- [38] Р. Г. Бархударян and А. В. Погосян. О сходимости одного квазиполиномиального приближения. *Доклады НАН Армении*, 107(1):13–19, 2007.
- [39] А. Нерсисян and Р. Бархударян. Ускорение сходимости разложения по собственным функциям одной модельной краевой задачи с разрывным коэффициентом. *Доклады НАН Армении*, 106(1):5–12, 2006.
- [40] A. Nersessian, A. Poghosyan, and R. Barkhudaryan. Accelerating convergence of Fourier series. *Journal of Contemporary Math. Anal*, 41(2):42–55, 2006.
- [41] Р. Бархударян. Ускорение сходимости разложений по собственным функциям системы Дирака. *Математика в высшей школе*, 2(3):54–62, 2006.
- [42] Р. Бархударян. Обобщения полиномиального метода для разложений по собственным функциям системы Дирака. In *Тезисы докладов "Математическая Физика и Смежные Вопросы Российско-Армянское рабочее совещание.*, page 23. 2006.
- [43] Б. Левитан and И. Саргсян. *Введение в спектральную теорию*. Наука Москва, 1970.
- [44] И. Саргсян. Разложение по собственным функциям одномерной системы Дирака. *ДАН СССР*, 166(6):1292–1295, 1966.
- [45] И. Саргсян. Теорема о полноте собственных функций обобщенной системы Дирака. *ДАН Арм. ССР*, 42(2):77–82, 1966.
- [46] Э. Абдукадыров. Вычисление регуляризованного следа для системы Дирака. *Вестник Москов. ун-та*, (4):17–24, 1967.
- [47] R. Szmtykowski. Discontinuities in Dirac eigenfunction expansions. *J. Math. Phys.*, 42(9):4606–4617, 2001.
- [48] Т. Арутюнян and Э. Азизян. О собственных значениях краевой задачи для канонической системы Дирака. *Математика в высшей школе, в печати*.
- [49] Т. Арутюнян. Изоспектральные операторы Дирака. *Изв. НАН Арм.*, 29(2):1–10,

1994.

- [50] R. Szmytkowski and J. Hinze. Kapur-Peierls and Wigner R -matrix theories for the Dirac equation. *J. Phys. A*, 29(18):6125–6141, 1996.
- [51] R. Szmytkowski and J. Hinze. Convergence of the non-relativistic and relativistic R -matrix expansions at the reaction volume boundary. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 29:761–777, 1996.
- [52] R. Alicki. Dirac equations for MHD waves: Hamiltonian spectra and supersymmetry. *J. Phys. A*, (25):6075–6085, 1992.
- [53] J. Chang. The R -matrix theory of electron-atom scattering using the Dirac Hamiltonian. *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.*, 8(14):2327–2335, 1975.
- [54] M. Gadella and F. Gómez. On the Mathematical Basis of the Dirac Formulation of Quantum Mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 42(10):2225–2254, 2003.
- [55] G. Goertzel. Resonance reaction involving Dirac-type incident particles. *Phys. Rev.*, 73(12):1463–1466, 1948.
- [56] Б. Левитан and И. Саргсян. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*. Москва, Наука, 1988.
- [57] М. Гасымов and Б. Левитан. Обратная задача для системы Дирака. *ДАН СССР*, 167(5):967–970, 1966.
- [58] A. Bjork and V. Pereyra. Solution of Vandermonde systems of equations. *Math. Comp.*, pages 893–904, 1970.
- [59] A. Gelb and D. Gottlieb. The resolution of the gibbs phenomenon for 'spliced' functions in one and two dimensions. *Computers Math. Applic.*, 33(11):35–58, 1997.
- [60] M. S. Min and D. Gottlieb. On the convergence of the Fourier approximation for eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(6):2254–2269 (electronic) (2003), 2002.
- [61] L. Mishoe. *Eigenfunction expansions associated with non-selfadjoint differential equations*. Delaware State College, Dover, Del., 1964.

- [62] L. Mishoe. On the Gibb's phenomenon in a certain eigenfunction series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:1–5, 1958.
- [63] L. Brandolini and L. Colzani. Localization and convergence of eigenfunction expansions. *J. Fourier Anal. Appl.*, 5(5):431–447, 1999.
- [64] J. Heywood and R. Rannacher. On the question of turbulence modeling by approximate inertial manifolds and the nonlinear Galerkin method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(6):1603–1621, 1993.
- [65] M. Taylor. The Gibbs phenomenon, the Pinsky phenomenon, and variants for eigenfunction expansions. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(3-4):565–605, 2002.
- [66] K. Coletta, K. Dias, and R. Strichartz. Numerical analysis on the Sierpinski gasket, with applications to Schrödinger equations, wave equation, and Gibbs' phenomenon. *Fractals*, 12(4):413–449, 2004.
- [67] J. Mann. Hausdorff means and the Gibbs phenomenon. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 121:277–295, 1966.
- [68] S. Kaber. The Gibbs phenomenon for Jacobi expansions. *Communications in Applied Analysis*, 10:551–555, 2006.