Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

Алексанян Саркис Акопович

Равномерные и касательные приближения целыми и мероморфными функциями в комплексных областях

(01.01.01—математический анализ)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

На соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель

Академик НАН РА Н. У. Аракелян

Ереван - 2009

Оглавление

Введение

Вопросы о возможности равномерных приближений целыми функциями на неограниченных замкнутых множествах E комплексной плоскости $\mathbb{C}$ исследовался в работах Т. Карлемана [1], А. Рота, М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [2], М. В. Келдыша [3]. Полное решение этой задачи получена в работе Н. У. Аракеляна [4]. Вопросы о возможности равномерных приближений мероморфными функциями на неограниченных замкнутых множествах $\mathbb{C}$ исследовался в работах А. Рот [5]-[7], а также Нерсисяна [8].

Приближаемая на E функция f естественно принадлежит классу $A(E)$ функций непрерывных на E и голоморфных внутри E, без ограничений роста f в бесконечности.

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые вопросы, связанные с так называемыми наилучшеми, или оптимальными приближениями целыми и мероморфными функциями g, когда приближение сопровождается возможно точной оценкой роста аппроксимирующих функций f. Этот рост, зависящий от множества E и свойств приближаемой функции f, можно измерить в терминах роста неванлиневской характеристики $T(r, g)$ в случае мероморфных функций и роста функции $\log M(r, g)$, где $M(r, g)$ -максимум $|g|$ на окружности $|z| = r$, в случае целых функций.

Работа состоит из двух глав. Первая глава посвящена вопросам равномерного и приближения на замкнутом угле целыми функциями с оценкой их роста.

Известно, что некоторые неограниченные канонические множества комплексной плоскости, как вещественная оса $\mathbb{R}$, замкнутый угол и полоса, являются множествами равномерного приближения целыми функциями (см. [9], гл. 2 и [10]).

В этом направленнии, как в аналогичной задаче наилучшего (или типа Джексона) полиномного приближения, возникает следующая задача: для канонического множества E и функции $f \in A(E)$ конструктировать аппроксимирующие целые функции

g, рост которых в $\mathbb{C}$ были бы оптимальными в некотором смысле, т.е. были возможно медленными. Этот рост вообще зависит от роста функции f, а также от величин, характерующих структуру f на E, в частности от дифференциальных свойств f на границе E. С точки зрения классической теории целых функций интересно выделить классы функций на канонических множествах, которые допускают равномерную аппроксимацию целыми функциями данного конечного порядка с оценками их типа.

Задача об оптимальном равномерном и касательном приближении целыми функциями на канонических множествах исследовалась в работах Кобера [11], М. В. Келдыша [3] (см. доказательства в [9]), С. Н. Бернштейна [12]-[13], [14], М.М. Джрбашяна и А. Л. Тамадяна [15]-[16], Н. У. Аракеляна [17]-[18], и Н.У. Аракеляна и Г. Шахголяна [19]. В этой работе мы рассмотрим задачу для аппроксимации на замкнутых углах $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \le \alpha/2\}$. Как показано в [3] (см. доказательство в [9]), функцию $f \in A(\Delta_{\alpha+\delta})$, $(\delta > 0)$ можно равномерно аппроксимировать на Δ_α целыми функциями g, для роста которого была получена оценка, зависящая лишь от α, δ и от роста функции f на $\Delta_{\alpha+\delta}$; эти оценки непосредственно показывают возможный оптимальный порядок роста функции g в $\mathbb{C}$, но ничего не говорят об их типе.

Более точные результаты о равномерном приближении на Δ_α целыми функциями получены в работе [17], предпологая, что f непрерывно дифференцируема на границе Δ_α. В работе [17] получено следующее утверждение: если функция $f(z)$ голоморфна в Δ_α, а функция $f(z^{1/\rho})$ равномерно непрерывна на $\overline{\Delta}_{\alpha\rho}$, то $f(z)$ можно на $\overline{\Delta}_\alpha$ аппроксимировать целыми функциями порядка $\le \rho$.

В работе [32] рассмотрена следующая задача: функцию f голоморфную на Δ_α и дважды непрерывно дифференцируемую на $\partial\Delta_\alpha$ аппроксимировать целыми функциями с оценкой их роста. При этом были исползовани некоторые конструкции аппроксимации, развитые в работах [18] и [19].

Приближения указанного типа осуществляется двумя шагами. Во-первых функция $f \in A''(\Delta_\alpha)$ аппроксимируется фунциями из класса $A(\Delta_\alpha^\tau)$, где $E^\tau := \{\zeta \in \mathbb{C} : d_E(\zeta) \le$

$\tau\}$-Лемма 1.3. Затем эти функции аппроксимируются на Δ_α целыми фунциями (Теорема 1.1). Обьеденив эти две задачи, мы получим решения требуемой задачи (Теорема 1.2). При этом рост аппроксимирующих функций зависит от роста функции f на Δ_α и от роста производных на $\partial\Delta_\alpha$.

В первом главе доказано в частности, что если функция $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ и для некоторого $\nu \geq 0$ удовлетворяет условию,

$$\log M_f(r, \Delta_\alpha) = O(r^\nu) \text{ и } \log M_{f''}(r, \Delta_\alpha) \text{ при } r \to \infty,$$

то f можно равномерно приблизить на угле Δ_α целыми функциями, с ростом не выше порядка $\rho+\nu$ и нормального типа, если $\nu > 0$. Из теоремы Фрагмена-Линделефа следует, что указанный порядок нельзя уменшить.

Во второй главе рассмотрены вопросы равномерного и касательного приближения *мероморфными функциями* с оценкой их роста.

Основной целью этой главы является конструирование мероморфных функций, которые *равномерно* или *касательно* на полосе(угле) аппроксимировали бы заданную функцию, голоморфную внутри данного полосы (или угла) и непрерывной на замыкании полосе (угле), и имели возможно медленный рост на комплексной плоскости.

Задача равномерного и касательного приближения на вещественной осы $\mathbb{R}$ мероморфными функциями исследовался в работах [20] и [21]. Известно, что ограниченную на $\mathbb{R}$ функцию можно равномерно приблизить целыми функциями порядка не меньше 1, но в [21] доказано, что существуют нетривиальные ограниченные на $\mathbb{R}$ фунлции, допускающие равномерное приближенние на $\mathbb{R}$ *меромофными* функциями данного порядка ρ для $0 < \rho < 1$.

В параграфе 2.2 изучается вопрос о мероморфном приближении на данной полосе S_h, реализуемый, как и в случае целых приближений в [19], двумя шагами. В первом шагу мы функцию $f \in A''(S_h)$ аппроксимируем функциями $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, где

$$\Omega_h^\alpha := \mathbb{C} \setminus (\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^o \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^o) \cup S_{2h} \text{ для } h > 0.$$

Во втором шагу функцию F аппроксимируем на S_h мероморфными функциями g с оценкой их роста. При этом полюсы функции g расположены на мнимой осы.

В [19] было установлено, что для того, чтобы ограниченная функция $f \in A(S_h)$ допускала равномерное приближение на S_h целыми функциями экспоненциального типа, необходимо и достаточно, чтобы f была равномерно непрерывна на ∂S_h. В случае мероморфного приближения оказывается, что при дополнительных ограничениях на f можно уменшить порядок аппроксимирующих функций: пусть $\nu(r) = r^\rho$ на $\mathbb{R}^+$ и продолжим ν на $\mathbb{R}$ нечетным образом и положим $\mu(z) = \mu_0(x) + iy$ для $z = x + iy \in S_h$, где $\mu_0 = \nu^{-1}$. Если $f \in A_b''(S_h)$, $(f \circ \mu)'$ и $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h, то f можно равномерно приблизить на S_h функциями из класса M^ρ: -это класс мероморфных функций g, ограниченые на S_h, с полюсами лежащим на мнимой осы, неванлинновская характеристика $T(r, g)$ которых удовлетворяет условию

$$T(r, g) = O(r^\rho) \text{ для } r \to \infty,$$

т. е. g имеет рост не выше порядка ρ и нормального типа.

Эта теорема в некотором смысле обратима: если функция $f \in A(S_h)$ допускает равномерную аппроксимацию функциями из класса M^ρ, то $f \circ \mu$ равномерно непрерывна на ∂S_h.

Параграфы 2.3-2.4 посвящены вопросам мероморфных приближений на угловых областьях.

В работе [22] Тер-Исраеляна рассматривалось задача равномерного и касательного приближения функции f, голоморфной в угле раствора α, мероморфными функциями в угле раствора $\alpha - \delta$ с оценкой роста приближающих мероморфных функций в терминах роста их неванлинновской характеристики. Затем аналогичный вопрос был рассмотрин Хачатряном (см. [23], пункт 2). Наконец в работах [24]-[25] был уточнен рост аппроксимимирующих функций.

В параграфах 2.3-2.4 диссертации оптимальная равномерно-касательная мероморфная аппроксимация осуществляется на замкнутом угле, где задана аппроксимируемая функция, требуя, чтобы она была дважды непрерывно дифференцеруема на границе угла. При этом рассматривается также вопрос о расположении полюсов аппроксимирующих мероморфных функций (см. Теоремы 2.6-2.8).

Интерес к такого рода приближениям стимулируется как потребностями самой теории приближений, так и возможными их приложениями в теории распределения значений мероморфных функций [26].

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [30]–[32].

Глава 1

Равномерные приближения целыми функциями в угловой области с оценкой их роста

1.1 Некоторые обозначения и определения

В настоящей работе мы придерживаемся общепринятых теоретико-множественных и иных стандартных терминов и обозначений. Нижеследующие обозначения и определения также в значительной степени стандартны. Другие необходимые специфические определения и понятия будут введены по мере необходимости.

Пусть буквы $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуралных и вещественных чисел. Обозначим через $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ соответственно комплексную плоскость и Римановую сферу. *Внутреность, замыкание и границу* множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим соответственно через E^o, $\overline{E}$ и ∂E, а *дополнение* E в $\mathbb{C}$ - через E^c.

Пусть $C\left(E\right)$ для замкнутого множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначает класс непрерывных функций $f : E \to \mathbb{C}$. Мы положим

$$\left\|f\right\|_E = \sup_{z\in E}\left|f(z)\right|,$$

если E компактное множество и

$$C_b\left(E\right) := \left\{f \in C\left(E\right) : \left\|f\right\|_E < +\infty\right\}$$

Если E -неограниченное множество и $E \cap \partial D_r \neq \varnothing$ для $r \geq r_0 \geq 0$, то обозначим

$$M_f\left(r\right) = M_f\left(r,\ E\right) := \left\|f\right\|_{E\cap\overline{D}_r}.$$

Пусть $C'(\Omega)$ для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ -класс непрерывно дифференцируемых (в смысле $\mathbb{R}^2$) комплексных функций на Ω. Для $z = x + iy \in \Omega$ и $f \in C'(\Omega)$ обознчим через f'_x и f'_y частные производные функции f.

Предположим теперь, что G *-жордановая область* с положительно ориентированной кусочно гладкой границей Γ. Класс $C'(\overline{G})$ определим стандартным путем, как класс функций $\varphi \in C(\overline{G}) \cap C'(G)$, допускающих непрерывное продолжение производных φ'_x и φ'_y из G к $\overline{G}$; это определяет их однозначно на Γ. Следующая формула являеться комплексным вариантом известной *теоремы о дивергенции* для $\varphi \in C'(\overline{G})$:

$$\int_\Gamma \varphi(z)\, dz = i \int_G 2\overline{\partial}\varphi d\sigma, \tag{1.1}$$

где σ -лебеговая плоская мера на G и оператор $\overline{\partial}$ определяется следующим образом:

$$2\overline{\partial}\varphi := \varphi'_x + i\varphi'_y. \tag{1.2}$$

Для $\varphi, \psi \in C'(\overline{G})$ оператор $\overline{\partial}$ обладает свойством

$$\overline{\partial}(\varphi\psi) = \psi\overline{\partial}\varphi + \varphi\overline{\partial}\psi. \tag{1.3}$$

В *полярных* координатах $t = re^{i\theta}$ частные производные функции φ по r и θ обозначим соответственно через φ'_r и φ'_θ. В этих терминах

$$2\overline{t}\overline{\partial}\varphi = r\varphi'_r + i\varphi'_\theta]. \tag{1.4}$$

Как обычно, $H(\Omega)$ обозначает класс *голоморфных* в Ω функций, так что $\varphi \in H(\Omega)$ тогда и только тогда, если $\varphi \in C'(\Omega)$ и $\overline{\partial}\varphi = 0$ в Ω (условие Коши-Римана), при котором (1.1) есть классическая теорема Коши с нулевой левой частью.

Для замкнутого множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим

$$A(E) = C(E) \cap H(E^o),$$

и пусть $A'(E)$, $A''(E)$ - классы функций $E \to \mathbb{C}$, один (и соответственно два) раза непрерывно дифференцируемые на E *в смысле* $\mathbb{C}$.

Предположим теперь, что $\varphi \in C'(\overline{G})$. Из (1.1) следует формула:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)C_t\,(z)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_G \overline{\partial}\varphi(t)C_t\,(z)\,d\sigma \text{ для } z \in G, \tag{1.5}$$

где $C_t\,(z) = (t-z)^{-1}$ -*ядро Коши*; (1.5) известна как обобщенная формула Коши (иногда как *формула Борела-Помпейю)*; для $\varphi \in H\left(\overline{G}\right)$ с $\overline{\partial}\varphi = 0$ на $\overline{G}$ (1.5) является классической формулой Коши.

Положим также:

$d(z) = d(z, E) := \inf\{|z-\zeta| : \zeta \in E\}$ - расстояние $z \in \mathbb{C}$ из $E \subset \mathbb{C}$;

$E^\tau := \{\zeta \in \mathbb{C} : d_E(\zeta) \leq \tau\}$ - τ - окрестьность множества $E \subset \mathbb{C}$;

$D_r\,(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ для $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ - открытый круг; $D_r = D_r\,(0)$;

$l_\theta := \{z = re^{i\theta} : r \geq 0\}$ для $\theta \in \mathbb{R}$ - луч; $\mathbb{R}_+ = l_0$, $\mathbb{R}_- = l_\pi$.

$\Delta_{\alpha,\beta} := \{z = re^{i\theta} : r \geq 0,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ - сектор с раствором $\beta - \alpha < 2\pi$;

$\Delta_\alpha(\beta) := \Delta_{\beta-\alpha/2,\beta+\alpha/2}$ для $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ - угол с биссектрисой l_β;

$\Delta_\alpha := \Delta_\alpha(0)$; $\gamma_\alpha := l_{\alpha/2} \cup l_{-\alpha/2} = \partial\Delta_\alpha$; $d_\alpha(z) = d(z, \gamma_\alpha)$ для $z \in \mathbb{C}$;

$x^+ := \max\{x, 0\}$ для $x \in \mathbb{R}$; $\log^+ x = (\log x)^+$ для $x > 0$ и $\log^+ 0 = 0$;

$$s_z := \begin{cases} z/\,|z| & \text{для } z \neq 0, \\ 0 & \text{для } z = 0 \end{cases} \text{ - функция } \textit{знака.}$$

1.2 Гладкое продолжение гладких функций

В этом параграфе нам нужен некоторый специфический результат о C'- продолженнии для функции $f \in A'(\Delta_\alpha)$ с $\alpha \in (0, 2\pi)$. Положим $\sigma = 2\pi - \alpha$, такой что $\partial\Delta_\sigma(\pi) = \gamma_\alpha = \partial\Delta_\alpha$. Нашей целью является построение C' функции f_* на $\mathbb{C}$ такой, что $f_* = f$ на Δ_α, с соответствующими оценками для f_* и $\overline{\partial}f_*$ на $\Delta_\sigma(\pi)$ в тернинах роста функции f' (и также роста f'', если $f \in A''(\Delta_\alpha)$). Фактически f_* на $\Delta_\sigma(\pi)$ будет построена, используя только значения сужения $f \mid \gamma_\alpha$.

1^0) Рассмотрим в $\Delta_\sigma(\pi)$ дополнительные углы $\Delta_\sigma^+ = \Delta_{\alpha/2,\pi}$ и $\Delta_\sigma^- = \Delta_{-\alpha/2,-\pi}$, и введем две C' - функции $\zeta = \zeta(t)$ и $w = w(t)$, определенные отдельно для $t = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma^\pm$

формулами

$$\zeta = (r\sin\varphi)e^{\pm i\alpha/2},\ w = w_\pm = (r\tau^{-1}\cos\varphi)e^{\pm i\alpha/2}, \tag{1.6}$$

где $\varphi = \tau(\pi - |\theta|) \in [0, \pi/2]$ для $\tau = \pi/\sigma$. Фактически $\zeta \in C(\Delta_\sigma(\pi))$, так как $\zeta = 0$ на $\mathbb{R}_-$, с обеих сторон. В отличие от ζ, $w_+ \neq w_-$ на $\mathbb{R}_-$. Мы по (1.6) можем легко проверить следующие соотношения:

$$r\zeta'_r = \zeta,\ rw'_r = w,\ \zeta'_\theta = -s_\theta\tau^2 w,\ w'_\theta = s_\theta\zeta. \tag{1.7}$$

Замечание 1.1 *Функции ζ и w в (1.6) имеют следующие свойства: (a) $\zeta, w \in l_{\pm\alpha/2}$ для $t \in \Delta_\sigma^\pm$, так что $\zeta + w \in l_{\pm\alpha/2}$ для $t \in \Delta_\sigma^\pm$; (b) $\zeta(t) = t$ или $w(t) = 0$ для $t \in \Delta_\sigma^\pm$ только при $t \in l_{\pm\alpha/2}$; (c) $\zeta(t) = 0$ для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$, только при $t \in \mathbb{R}_-$; (d) если $d = d_\sigma(t)$ -расстояние $t \in \Delta_\sigma^\pm$ от γ_α, то*

$$|\zeta| \le r,\ \tau\,|w| \le r,\ \ |w| \le 2d_\sigma(t). \tag{1.8}$$

Достаточно проверить лишь третые неравенство в (1.8). По (1.6),

$$|w| = (r/\tau)\sin(\tau\vartheta), \tag{1.9}$$

где $\vartheta = |\theta| - \alpha/2 \in [0, \sigma/2]$. Если теперь $\vartheta > \pi/2$ в (1.9) (с $\sigma > \pi$), то $d = r$ и $|w| \le r/\tau \le 2d$. Если же $\vartheta \le \pi/2$, то $d = r\sin\vartheta$, и поскольку $\sin(\tau\vartheta) \le \tau\vartheta \le (\tau\pi/2)\sin\vartheta$, мы снова имеем $|w| \le (\pi/2)d \le 2d$.

2^0) Определим искомую функцию $f_* \in C'$ на $\mathbb{C}$ для $f \in A'(\Delta_\alpha)$ с $f_* = f$ на Δ_α, сначала предположив, что

$$f(0) = f'(0) = 0. \tag{1.10}$$

Положим для $t = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma^\pm$ (с $\pm\theta \in [\alpha/2, \pi]$):

$$f_*(t) = f(\zeta) + is_\theta\psi(\theta)\phi(t), \tag{1.11}$$

где $\psi(\theta) = \sin\varphi$ с $\varphi = \tau(\pi - |\theta|)$, s_θ является функцией знака θ, и

$$\phi(t) = f(\zeta + w) - f(\zeta) - f(w). \tag{1.12}$$

Формулы (1.11) - (1.12) исползуют лишь значения сужения $f \mid \gamma_\alpha$ (см. Замечание 1.1, (a)).

Формально (1.12) определяет две разные C' - функции на $\Delta_\sigma^\pm$. Но отметим, что $\phi(t)$ *исчезает* для $t \in \mathbb{R}_-$, то есть для $\zeta = 0$ по Замечанию 1.1, (c), независимо от выбора ветвей $w_\pm$. Положив $\phi \equiv 0$ на l_π, мы получим, что $\phi \in C(\Delta_\sigma(\pi))$. При этом, $w = f(w) = 0$ для $w \in \gamma_\alpha$ по Замечанию 1.1, (b) и (1.10), следовательно $\phi \equiv 0$ на γ_α.

Отметим, что $f_* \in C(\Delta_\sigma(\pi))$ и $f_* = f$ на γ_α по Замечанию 1.1, (b), следовательно $f(\zeta) = f(t)$ и $\phi(t) \equiv 0$ для $t \in \gamma_\alpha$. По (1.11) -(1.12) и (1.8) мы получим оценку

$$|f_*(t)| \leq 4M_f(r + 2d, \gamma_\alpha) \text{ для } t \in \Delta_\sigma(\pi). \tag{1.13}$$

3^0) Чтобы проверить, что $f_* \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$, отметим, что $f \circ \zeta \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$ и из (1.4) и (1.7),

$$2\bar{t}\overline{\partial} f(\zeta) = f'(\zeta)(\zeta - is_\theta \tau^2 w) \text{ для } t \in \Delta_\sigma(\pi). \tag{1.14}$$

Далее, $\psi \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$ и $\phi \in C'(\Delta_\sigma^\pm)$. Поскольку $(\psi\phi)'_r = \psi\phi'_r$, $(\psi\phi)'_\theta = \psi'\phi + \psi\phi'_\theta$ на $\Delta_\sigma^\pm$ и $\phi = \psi = 0$ на $\mathbb{R}_-$, то $(\psi\phi)'_r$ и $(\psi\phi)'_\theta$ вместе с $\overline{\partial}(\psi\phi)$ исчезают на $\mathbb{R}_-$ с обеих сторон. Таким образом $s_\theta\psi\phi \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$, что влечет $f_* \in C'(\Delta_\sigma(\pi))$.

Согласно (1.4), (1.7) и (1.12), для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$ имеем

$$\begin{aligned} 2\bar{t}\overline{\partial}\phi(t) &= [f'(\zeta + w) - f'(\zeta)](\zeta - is_\theta\tau^2 w) \\ &\quad + [f'(\zeta + w) - f'(w)](w + is_\theta\zeta). \end{aligned}$$

Это вместе с (1.3), (1.11) и (1.14) дает для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$:

$$\begin{aligned} 2\bar{t}\overline{\partial} f_*(t) = \quad & -s_\theta\psi'(\theta)\phi(t) + \eta_1 f'(\zeta) + \eta_2 f'(w) + \\ & \eta_3[f'(\zeta + w) - f'(\zeta)] + \eta_4[f'(\zeta + w) - f'(w)], \end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (1 - \psi(\theta))\zeta + is_\theta\tau^2 w, \ \eta_2 = \psi(\theta)\zeta, \\ \eta_3 &= \psi(\theta)(\tau^2 w + is_\theta\zeta - \zeta), \ \eta_4 = is_\theta\psi(\theta)w. \end{aligned}$$

Правая часть (1.15) обращаеться в нуль для $t \in \gamma_\alpha$, поскольку, тогда $w = 0$ и $|\theta| = \alpha/2$, что влечет $\eta_1 = \eta_4 = 0$ и $\phi(t) = 0$, $f'(w) = 0$. Таким образом $\overline{\partial} f_*(t) = 0$ для $t \in \gamma_\alpha$.

4^0) Для оценки $\overline{\partial} f_*(t)$ при $t = re^{i\theta} \in \Delta_\sigma(\pi)$, мы должны оценить функции η_k для $1 \le k \le 4$. Поскольку $1 - \psi(\theta) \le \cos\varphi$ с $\varphi = \tau(\pi - |\theta|)$, из (1.6) и (1.8) следует, что

$$|\eta_1| \le (\tau + \tau^2)\,|w|\,, \;\; |\eta_4| \le |w|\,, \tag{1.16}$$

так что опять по (1.8),

$$|\eta_1| \le (1+\tau)r, \;\; |\eta_4| \le \tau^{-1} r, \tag{1.17}$$

и аналогично

$$|\eta_2| \le r, \;\; |\eta_3| \le (2+\tau)r. \tag{1.18}$$

Теперь с помощью интегрирования функции f' вдоль γ_α мы получим по (1.12), что

$$|\phi(t)| \le \int_0^w |f'(\zeta + s) - f'(s)|\,|ds|\,. \tag{1.19}$$

Поскольку $|\psi'(\theta)| \le \tau$, то из (1.19) с (1.8) для $t \in \Delta_\sigma(\pi)$ следует, что

$$|\psi'(\theta)\phi(t)| \le 2\tau\,|w|\,M_{f'}(|\zeta| + w) \le (2r) M_{f'}(r + 2d, \gamma_\alpha).$$

Отсюда и из (1.15), с учетом (1.17) - (1.18), мы приходим к неравенству

$$\left|\overline{\partial} f_*(t)\right| \le k'_\alpha M_{f'}(r + 2d, \gamma_\alpha) \text{ for } t \in \Delta_\sigma(\pi), \tag{1.20}$$

где $k'_\alpha > 0$ постоянная, зависящая лишь от α.

5^0) Пологая, что $f \in A''(\gamma_\sigma)$, мы можем оценить $\overline{\partial} f_*$ на $\Delta_\sigma(\pi)$ также в терминах роста функции f'' на γ_α. По теореме о среднем значении применительно к (1.19) и по (1.8) следует, что

$$|\phi(t)| \le M_{f''}(|\zeta| + |w|\,, \gamma_\alpha)\,|\zeta|\,|w| \le 2rdM_{f''}(r + 2d, \gamma_\alpha).$$

Аналогические оценки могут быть получены также для других четырех членов в (1.15), используя на этот раз оценки (1.16) для η_1 и η_4, и (1.18) - для η_2 и η_3 вместе со свойством о средном значении соответственно для интервалов $[0,\zeta]$, $[0,w]$, $[\zeta,\zeta+w]$ и $[w,\zeta+w]$. Окончательно из (1.15) и (1.8) получим:

$$\left|\overline{\partial} f_*(t)\right| \le k''_\alpha d M_{f''}(|t|+2d,\gamma_\alpha) \text{ для } t\in\Delta_\sigma(\pi), \tag{1.21}$$

где $k''_\alpha>0$ зависит лишь от α.

6^0) Чтобы определить функцию f_* без условия (1.10), положим $r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$ и

$$\mathbf{f}(t) = f(t) - \lambda(t) \text{ для } t\in\Delta_\alpha, \tag{1.22}$$

где $\lambda\in H(\overline{\mathbb{C}}\backslash\{-r_\alpha\})$ дробно-линейная функция

$$\lambda(t) = f(0) + f'(0) t r_\alpha (t+r_\alpha)^{-1}.$$

Теперь $\mathbf{f}$ удовлетворяет (1.10), и если $\mathbf{f}_*$ построена для $\mathbf{f}$ как в (1.11) - (1.12), то мы положим $f_* = \mathbf{f}_* + \lambda$ с $\mathbf{f}_*\in C'$ на $\mathbb{C}$ так, что $f_*=f$ и $\overline{\partial} f_* = \overline{\partial} f$ на γ_α, поскольку $\overline{\partial}\lambda(t)=0$ для $t\in\Delta_\alpha$. При этом, существует постоянная $k_\alpha>0$, зависящая от α, так что $|\lambda(t)|\le|f(0)|+k_\alpha|f'(0)|$ и $\max\{|\lambda'(t)|,|\lambda''(t)|\}\le k_\alpha|f'(0)|$ для $t\in\Delta_\alpha$. Отсюда и из (1.13), (1.20) - (1.21) (с $\mathbf{f}$ вместо f) мы для $t\in\Delta_\sigma(\pi)\backslash D_1\{-r_\alpha\}$ получим оценки:

$$|f_*(t)| \le k[M_f(r+2d,\gamma_\alpha)+1], \tag{1.23}$$

$$\left|\overline{\partial} f_*(t)\right| \le k M_{f'}(r+2d,\gamma_\alpha), \tag{1.24}$$

$$\left|\overline{\partial} f_*(t)\right| \le k d [M_{f''}(|t|+2d,\gamma_\alpha)+1], \tag{1.25}$$

где $k>1$ постоянная, зависящая лишь от α и $|f'(0)|$.

Суммируя сказанное, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 1.1 *Пусть $f\in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha\in(0,2\pi)$ и $\sigma:=2\pi-\alpha$ (так что $\partial\Delta_\sigma(\pi)=\gamma_\alpha$). Существует C' - функция f_* на $\mathbb{C}\backslash\{-r_\alpha\}$ с $r_\alpha=2/\sin(\alpha/2)$, удовлетворящая условиям: (i) $f_*=f$ на Δ_α, так что $\overline{\partial} f_*=0$ на Δ_α; (ii) рост функций f_* и $\overline{\partial} f_*$ для $t\in\Delta_\sigma(\pi)\backslash D_1\{-r_\alpha\}$ ограничивается неравенствами (1.23) - (1.25), где $d=d_\alpha(t)$ -расстояние t от γ_α, и $k>1$ зависит от α и $|f'(0)|$.*

1.3 Приближение ядра Коши

Процесс оптимального равномерного приближения на угловой области $\Delta_\alpha \subset \mathbb{C}$ с $\alpha \in (0, 2\pi)$ целыми функциями будет реализован двумя шагами. Используя Лемму 1.1 и формулу представления (6), мы сначала приближаем данную функцию $f \in A''(\Delta_\alpha)$ на Δ_α функциями $F \in A(\Delta_\alpha^\tau)$ для некоторого $\tau > 0$ с оценкой роста функции F на Δ_α^τ. Затем функция F равномерно приближается на Δ_α *целыми* функциями. Реализация этих двух шагов основанно на построении соответствующих голоморфных и целых приближений *ядры Коши* $C_t(z) = (t-z)^{-1}$ для $z \in \Delta_\alpha$ и $t \in \Delta_\sigma(\pi) = (\Delta_\alpha^o)^c$, с оценкой роста аппроксимирующих функций.

Этот раздел-подготовка для *первой* из отмеченных шагов, где ядро Коши C_t с фиксированным полюсом $t \in \Delta_\alpha^\tau \backslash \Delta_\alpha$ приближается ограниченными функциями из $A(\Delta_\alpha^\tau)$ (на Δ_α для всех t, а также на каждом компактном подмножестве Δ_α^τ, если t достаточно далек от подмножества). Мы сводим приближение этого типа к приближению *нулевой* функции функциями из $A(\Delta_\alpha^\tau)$, равные 1 в точке t. Вводим для этого некоторые обозначения.

1^o) Для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\tau > 0$, положим $\gamma_{\alpha,\tau} := \partial\Delta_\alpha^\tau$ и с каждой точкой $t \in \Delta_\alpha^\tau \backslash \Delta_\alpha$ свяжем точку $t_\tau \in \gamma_{\alpha,\tau}$ так, что $|t - t_\tau| = d(t, \gamma_{\alpha,\tau})$. Тогда $|t| \le |t_\tau|$, и $t \in \gamma_{\alpha,\tau}$, если только $\tau = d_\alpha(t)$.

Отметим, что для $\alpha \le \pi$ точка t_τ определена *однозначно* по точке $t \in \Delta_\alpha^\tau \backslash \Delta_\alpha$, и соответствие $t \to t_\tau$ очевидно является *ортогональной проекцией* на $\gamma_{\alpha,\tau}$, удовлетворяющей

$$|t - t_\tau| = \tau - d_\alpha(t), \tag{1.26}$$

так что $|t| \le |t_\tau| \le |t| + \tau$. Чтобы сохранить (1.26) также для $\alpha > \pi$, достаточно считать $t \in (\Delta_\alpha^\tau \backslash \Delta_\alpha) \backslash D_{r_\tau}$, где

$$r_\tau = \tau / \sin(\alpha/2). \tag{1.27}$$

Мы пологаем $D_{r_\tau} = \varnothing$ для случия $\alpha \le \pi$ с $r_\tau = 0$.

Для *спрямляемой* дуги l обозначим через $|l|$ ее *длину*. Пусть $\nu \in (0,\tau)$ и $l_\nu \subset \gamma_{\alpha,\nu}$ есть дуга с ортогоналной проекцией $l_\tau \subset \gamma_{\alpha,\tau}$. Тогда $|l_\nu| \leq |l_\tau|$, где равенство выполняется в случае, если l_ν (а также l_τ) -отрезкой; если же l_ν (и также l_τ) -дуга окружности, то $|l_\nu|\,/\,|l_\tau| = \nu/\tau < 1$. Если теперь ds_ν и ds_τ *-элементы длины* на линиях $\gamma_{\alpha,\nu}$ и $\gamma_{\alpha,\tau}$ в соответствующах точках, то

$$ds_\nu/ds_\tau \leq 1, \text{ если } 0 < \nu < \tau. \tag{1.28}$$

2^o) Далее фиксируем $\tau = 1$ и положим $r'_\alpha = 0$, если $\alpha \leq \pi$, и $r'_\alpha = r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$, если $\alpha > \pi$. Можно легко проверить (как для ядра Дирихле на верхной полуплоскости) существование постоянной $c_\alpha > 0$, зависящей лишь от α, так что

$$\int_{\gamma_{\alpha,2}} |\zeta - z|^{-2}\,|d\zeta| < k_\alpha \text{ для } z \in \Delta^1_\alpha, \tag{1.29}$$

и несобственный интеграл (1.29) сходится *локально-равномерно* на Δ^1_α.

Положим $S_\alpha = (\Delta^1_\alpha \backslash \Delta^o_\alpha) \backslash D_{r_\alpha}$ и рассмотрим непрерывную функцию $q_a(t,z)$ переменных $(a,t,z) \in \mathbb{R}_+ \times S_\alpha \times \Delta^1_\alpha$, определенную формулой

$$q_a(t,z) = [w_t(z)]^{a+2} \text{ с } w_t(z) = (t-\zeta)(z-\zeta)^{-1}, \tag{1.30}$$

где $\zeta = t_2 \in \gamma_{\alpha,2}$ есть ортогоналная проекция t на $\gamma_{\alpha,2}$. Поскольку w_t не имеет нулей на односвязанной замкнутой области Δ^1_α и $w_t \in H(\Delta^1_\alpha)$, то $q_a(t,\cdot) \in H(\Delta^1_\alpha)$. Далее, из $w_t(t) = 1$ следует, что

$$q_a(t,t) \equiv 1 \text{ для } t \in \Delta^1_\alpha \backslash \Delta^o_\alpha. \tag{1.31}$$

По (1.26), (1.29) и (1.30),

$$|q_a(t,z)| \leq 4\,|\zeta - z|^{-2}\,[2 - d_\alpha(t)]^a\,|z-\zeta|^{-a},$$

и поскольку всегда $|z - \zeta| \geq 1$, то

$$|q_a(t,z)| < 4e^a \text{ для } z \in \Delta^1_\alpha. \tag{1.32}$$

Используя далее неравенство $1 - x \le \exp(-x)$ для $x = d_\alpha(t)/2 \le 1/2$, мы получим, что если $|z - \zeta| \ge 2$, то

$$|q_a(t,z)| \le 4\,|\zeta - z|^{-2} \exp\{-a d_\alpha(t)/2\}, \tag{1.33}$$

верное, в частности, для всех $z \in \Delta_\alpha$.

Суммируя, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 1.2 *Формула (1.30) определяет для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $S_\alpha = (\Delta^1_\alpha \backslash \Delta^o_\alpha) \backslash D_{r_\alpha}$ непрерывную функцию $q_a(t,z)$ от (a,t,z) на $\mathbb{R}_+ \times S_\alpha \times \Delta^1_\alpha$, с $q_a(t,\cdot) \in H(\Delta^1_\alpha)$, удовлетворящую (1.31) - (1.33).*

3^o. Пусть σ -плоская мера Лебега на $\mathbb{C}$. Хорошо известно, что для компакта $K \subset \mathbb{C}$ интеграл

$$J_K(z) = \frac{1}{\pi} \int_K |C_t(z)|\, d\sigma \text{ для } z \in \mathbb{C}$$

с фиксированной мерой $\sigma(K)$ достигает своего максимума для $K = D_\rho(z)$ с $\rho = [\sigma(K)/\pi]^{1/2}$, легко вычисляемая в полярных координатах:

$$|J_K(z)| \le 2\rho = 2\,[\sigma(K)/\pi]^{1/2}. \tag{1.34}$$

Пусть $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ и $\delta \in (0,1]$. Тогда в частности для $K_\delta = (\Delta^\delta_\alpha \backslash \Delta^o_\alpha) \cap \overline{D}_{r_\alpha}$ с $\sigma(K_\delta) \le 2r_\alpha\delta$ следует, что

$$J_{K_\delta}(z) \le 2(2r_\alpha/\pi)^{1/2}\delta^{1/2} < 2(r_\alpha\delta)^{1/2}. \tag{1.35}$$

1.4 Приближения на Δ_α голоморфными функциями в окрестности Δ_α.

Пусть $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $r'_\alpha = r_\alpha = 2/\sin(\alpha/2)$, если $\alpha > \pi$, и $r'_\alpha = 0$, если $\alpha \le \pi$, с $D_{r'_\alpha} = \varnothing$. Для $\delta \in (0,1]$ положим

$$\Lambda_{\alpha,\delta} = (\Delta^1_\alpha \backslash D_{r_\alpha}) \cup K_\delta, \text{ где } K_\delta = (\Delta^\delta_\alpha \backslash \Delta^o_\alpha) \cap \overline{D}_{r'_\alpha},$$

так что $\Lambda_{\alpha,\delta} = \Delta^1_\alpha$ для $\alpha \le \pi$ независимо от δ. Таким образом $d_\alpha(t) = \delta$ для $t \in \partial\Lambda_{\alpha,\delta} \cap D_{r'_\alpha}$ и $d_\alpha(t) = 1$ для $t \in \partial\Lambda_{\alpha,\delta} \backslash \overline{D}_{r'_\alpha}$.

Следующая лемма являеться вариантом реализации первого из отмеченного выше шагов приближения.

Лемма 1.3 *Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ и*

$$a_r := \varepsilon^{-1}[M_{f''}(r + 2, \gamma_\alpha) + 1] \text{ для } r \ge 0. \tag{1.36}$$

Тогда для $\Lambda = \Lambda_{\alpha,\delta}$ с $\delta = [ca_{r_\alpha}]^{-2/3}$ существует функция $F \in A(\Lambda)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - F(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha, \tag{1.37}$$

рост которой на Λ ограничена для $r \ge 0$ неравенством

$$M_F(r) < c_1[1 + M_f(r + 2, \Delta_\alpha)] + \exp\{c_2 a_{r+6}\}, \tag{1.38}$$

где c, c_1 и c_2 положительные постоянные, зависящие лишь от α и $|f'(0)|$.

Доказательство. Положим $S = \Lambda \backslash \Delta^o_\alpha$, $S_r = S \cap \overline{D}_r$ и $\Lambda_r = \Lambda \cap \overline{D}_r$ для $r \ge 0$. Пусть f_* есть C' - функция на $\mathbb{C} \backslash \{-r_\alpha\}$, построения для функции f в Лемме 1.1. Формула (1.5), примененная к функцию f_* и к области Λ_r, утверждает, что

$$f_*(z) = I_r(z) - J_r(z) \text{ для } z \in \Lambda^o_r, \tag{1.39}$$

где

$$I_r = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Lambda_r} f_*(t) C_t(\cdot) dt, \;\; J_r = \frac{1}{\pi} \int_{S_r} \overline{\partial} f_*(t) C_t(\cdot) d\sigma.$$

Пусть $q(t, z) := q_a(t, z)$ -функция из Леммы 1.2, определенная по формуле (30) для $t \in S \backslash D_{r'_\alpha}$ с a, зависящей от $|t|$, именно $a = 2c' a_{|t|+2}$, где a_r определен в (1.36), и c' подлежит выбору; положим также $q(t, z) = 1$ для $t \in S_{r'_\alpha}$, если $\alpha > \pi$.

Имеем, что $q(t, z)$ кусочно непрерывная функция по t, $q(t, \cdot) \in H(\Lambda_\alpha)$ и $q(t, t) \equiv 1$ для $t \in S$. Для $\mathcal{R}(t, z) := C_t(z)[q(t, z) - 1]$ это влечет $\mathcal{R}(t, \cdot) \in H(\Lambda)$, и для $z \in \Lambda_r$ интеграл

$$\mathcal{I}_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S_r} \overline{\partial} f_*(t) \mathcal{R}(t, z) d\sigma \tag{1.40}$$

определяет функцию $\mathcal{I}_r \in A(\Lambda_r)$.

Полагая $g(t,z) = \overline{\partial} f_*(t) C_t(z) q(t,z)$ для $(t,z) \in S \times \Lambda$ и

$$\mathbb{J}_r(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S_r} g(t,z) d\sigma \text{ для } z \in \Lambda, \tag{1.41}$$

мы согласно (1.39) - (1.40) получим, что $\mathbb{J}_r - J_r = \mathcal{I}_r \in A(\Lambda_r)$. Полагая $F_r := f_* + \mathbb{J}_r$, очевидно имеем, что $F_r \in C(\Lambda_r)$, и по (1.39) - (1.41), что $F_r = I_r + \mathcal{I}_r \in H(\Lambda_r^o)$, так что $F_r \in A(\Lambda_r)$.

Наша первая цель - потверждение локально-равномерной сходимости F_r на Λ при $r \to \infty$ к функции $F \in A(\Lambda)$, которую желательно представить для $z \in \Lambda$ в виде

$$F(z) = f_*(z) + \mathbb{J}_\infty(z), \tag{1.42}$$

если несобственный интеграл

$$\mathbb{J}_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_S g(t,z) d\sigma$$

сходится локально-равномерно на Λ. Тогда доказательство (1.37) и (1.38) можно свести к оценке $|\mathbb{J}_\infty|$ соответственно на Δ_α и на Λ.

Оценим сначала $g(t,z)$ в (1.41) для $(t,z) \in S \times \Lambda$. По (1.25) и (1.36) имеем, что

$$\left|\overline{\partial} f_*(t)\right| \le (\varepsilon k) a_{|t|} d_\alpha(t) \text{ для } t \in S, \tag{1.43}$$

где $k > 1$ зависит от α и $|f'(0)|$. Если $t \in S \cap D_{r_\alpha}$ и $\alpha > \pi$ с $d_\alpha(t) \le \delta$ и $q(t,z) \equiv 1$, мы имеем:

$$|g(t,z)| \le \varepsilon k a_{r_\alpha} \delta \left|C_t(z)\right| = (\varepsilon k / c) \delta^{-1/2} \left|C_t(z)\right|,$$

интегрируея которую на S_{r_α} и фиксируя $c = 4 k r_\alpha^{1/2}$, мы согласно (1.35) и (1.41) получим, что

$$|\mathbb{J}_{r_\alpha}(z)| < \varepsilon/2 \text{ для } z \in \mathbb{C}, \text{ если } \alpha > \pi. \tag{1.44}$$

Для всех остальных случаев для $t \in S$ неравенство

$$|q(t,z)| \le 4 \left|z - t_2\right|^{-2} \exp\{-c' a_{|t|+2} d_\alpha(t)\} \tag{1.45}$$

выполняется согласно (1.33) для $z \in \Lambda$, если $|z - t_2| \geq 2$. Тогда по (1.26), $|t - z| \geq d_\alpha(t)$, так что $|C_t(z)|\, d_\alpha(t) \leq 1$. Если же $|z - t_2| < 2$, то по (1.32),

$$|q(t,z)| \leq 4 \exp(2c' a_{|t|+2}). \tag{1.46}$$

Теперь из (1.43) и (1.45) - (1.46) для $c' \geq 2k$ следует

$$|g(t,z)| \leq |C_t(z)| \exp(3c' a_{|t|+2}) \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.47}$$

Если в частности $|z - t_2| \geq 2$, то

$$|g(t,z)| \leq 4\varepsilon k\, |z - t_2|^{-2}\, a_{|t|} \exp\{-c' d_\alpha(t) a_{|t|+2}\}. \tag{1.48}$$

Отметим, что (1.48) выполняется для всех $(t,z) \in S \times \Delta_\alpha$.

Положим теперь $\gamma_{\alpha,\tau} = \partial \Delta_\alpha^\tau$ и $\gamma_{\alpha,\nu,r} = \gamma_{\alpha,\tau} \backslash D_r$ для $r \geq r'_\alpha$. Из (1.26) следует, что $d_\alpha(t) = \tau$ и $|t| \leq |t_2| \leq |t| + 2$ для $t \in \gamma_{\alpha,\tau}$ с $\nu \in [0,1]$. Тогда из (1.47) - (1.48), положив $\zeta = t_2 \in \gamma_{\alpha,2}$, мы для $(t,z) \in \gamma_{\alpha,\tau} \times \Lambda$ с $|z - \zeta| \geq 2$ получим оценку:

$$|g(t,z)| \leq \varepsilon k\, |z - \zeta|^{-2}\, a_{|\zeta|} \exp(-c' a_{|\zeta|} \tau), \tag{1.49}$$

Правая часть (1.49), как подинтегралная функция, фактически зависит лишь от ζ и τ и кроме того $ds_\tau / |d\zeta| \leq 1$ по (1.28) так что $d\sigma \leq d\tau\, |d\zeta|$. Положив $l_r = \gamma_{\alpha,2} \backslash D_r$ для $r \geq r'_\alpha$, из (1.49) мы для $z \in \Lambda_{\alpha,r'}$ и $r > r'$ получим:

$$\begin{aligned} \int_{S \backslash S_r} |g(t,z)|\, d\sigma \leq & \quad \varepsilon k \int_{l_{2,r}} |z - \zeta|^{-2} \int_0^1 \exp(-c' a_{|\zeta|} \tau) a_{|\zeta|} d\tau\, |d\zeta| \\ < & \quad (\varepsilon k / c') \int_{l_{2,r}} |z - \zeta|^{-2}\, |d\zeta|\,. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Из локально-равномерной сходимости интеграла в (1.29), из (1.50) следует, что $\mathbb{J}_r(z) \to \mathbb{J}_\infty(z)$ локально-равномерно для $z \in \Lambda_{r'}$, при $r \to \infty$, потверждая, что $F \in A(\Lambda)$.

При $z \in \Delta_\alpha$, оценка (1.50) выполняется также для $r = r'_\alpha$, и из (1.29) следует, что

$$|\mathbb{J}_\infty(z)| < \varepsilon/2 + \left|\mathbb{J}_{r'_\alpha}(z)\right|,$$

если окончательно фиксировать $c' = 16k(k_\alpha + 1)$ с постоянной k_α, удовлетворяющей (1.29). Поскольку по Лемме 1.1 $f_* = f$ на Δ_α и $r'_\alpha = 0$, при $\alpha \leq \pi$, это вместе с (1.44) для $\alpha > \pi$ и (1.42) доказывает, что F удовлетворяет к (1.37).

Для доказательства (1.38), оценим $\mathbb{J}_\infty(z)$ для $z \in \Lambda_\alpha$. Положим $\mathbb{J}_\infty(z) = \mathbb{J}'(z) + \mathbb{J}''(z)$, с подынтегралной функцией $g(t,z)$ соответственно для $t \in S' = S \backslash D_4(z)$ и $t \in S'' = S \cap D_4(z)$. Тогда (1.26) для $t \in S'$ влечет $|z - \zeta| \geq 2$ для $\zeta = t_2$, и как в (1.50), мы из (1.48) получим, что $|\mathbb{J}'(z)| < \varepsilon \leq 1$. Далее, для $t \in S''$ следует, что $|t| \leq r + 4$ с $r = |z|$ и $\sigma(S'') < 8$, так что по (1.34), $J_{S''} \leq 2[\sigma(S'')/\pi]^{1/2} < 4$. Теперь из (1.47), полагая $c_2 = 4c'$, имеем:

$$|\mathbb{J}_\infty(z)| < 1 + |\mathbb{J}''(z)| \leq c' \exp(3c' a_{|t|+2}) \leq \exp(c_2 a_{r+6}). \tag{1.51}$$

Отметим, что согласно (1.42),

$$|F(z)| \leq |f_*(z)| + |\mathbb{J}_\infty(z)| \text{ для } z \in \Lambda,$$

что вместе с (1.51) влечет (1.38), учитывая, что по Лемме 1.1 $f_* = f$ на Δ_α, и из (1.23),

$$|f_*(z)| \leq c_1[M_f(r+2, \Delta_\alpha) + 1] \text{ для } z \in \Lambda,$$

где c_1 зависит от α и $|f'(0)|$. Это завершает доказательсрво Леммы 1.3. □

Применив неравенство $\log^+(a+b) \leq \log^+ a + \log^+ b + \log 2$ с $a, b \geq 0$ к функции $M_F(r)$ и используя (1.38) с (1.36), мы приходим к следующему замечанию.

Замечание 1.2 *Рост функции $F \in A(\Lambda)$ в Лемме 1.3 удовлетворяет для $r \geq 0$ неравенству*

$$\log^+ M_F(r) < c_3\{\log^+ M_f(r+2, \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1}[M_{f''}(r+8, \gamma_\alpha) + 1]\}, \tag{1.52}$$

где $c_3 > 0$ зависит лишь от α и $|f'(0)|$.

1.5 Равномерное приближение на Δ_α целыми функциями

Следуюшая лемма о равномерном приближении ядра Коши $C_\zeta(z)$ на Δ_α с полюсами ζ вне Δ_α целыми функциями с оптимальным ростом на $\mathbb{C}$ является основным средством для второго шага наилучшего приближения на угловых областях (см. Лемму 1 в [17]).

Лемма 1.4 *Для $\alpha \in (0, 2\pi)$ существует непрерывная функция $h_b(\zeta, z)$ переменных $(b, \zeta, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Delta_\alpha^c \times \mathbb{C}$ такая, что $h_b(\zeta, z)$ является целой функций по z для фиксированного $(b, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times \Delta_\alpha^c$, удовлетворяющей для $z \in \overline{D}_{|\zeta|/2} \cup \Delta_\alpha$ неравенству*

$$|h_b(\zeta, z) - C_\zeta(z)| < 44\delta^{-1} \exp(-b), \tag{1.53}$$

где $\delta = d_\alpha(\zeta)$ - расстояние ζ от $\gamma_\alpha = \partial\Delta_\alpha$.

Рост функции $h_b(\zeta, z)$ для $z \in \mathbb{C} \backslash D_{|\zeta|/2}$ ограничевается неравенством

$$|h_b(\zeta, z)| < \delta \exp\left\{c_\alpha(b/\delta)\, |\zeta|^{1-\rho} \left(|z| + \delta\right)^\rho\right\}, \tag{1.54}$$

где $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$ и $c_\alpha > 0$ постоянная зависящие лишь от α.

Следующая лемма утверждает существовние целой функции - веса для полуплоскости Δ_π.

Лемма 1.5 *Существует целая функция Ω с $\Omega(0) = 1$ такая, что $\omega(\zeta, z) := \Omega(\zeta - z)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$|\omega(\zeta, z)| \le 4\,|\zeta - z|^{-2} \ \text{для } (\zeta, z) \in \gamma_\pi^1 \times \Delta_\pi, \tag{1.55}$$

$$|\omega(\zeta, z)| \le 4e^{2|z|} \min\{1, |\zeta - z|^{-2}\} \ \text{для } (\zeta, z) \in \gamma_\pi^1 \times \mathbb{C}, \tag{1.56}$$

$$|\omega(\zeta, z)| \le e^{4|\zeta|} \ \text{для } (\zeta, z) \in \Delta_\pi^1 \times \mathbb{C}, \ \ |z| + 1 \le |\zeta|. \tag{1.57}$$

Положим $\Omega(w) = [\exp(w) - 1]^2 w^{-2}$ для $w \in \mathbb{C}$ с $\Omega(0) = 0$. Тогда очевидно

$$|\Omega(w)| \leq (e-1)^2 < 4 \text{ для } |w| \leq 1$$

и

$$|\Omega(w)| \leq 4e^{2(\operatorname{Re} w)^+} |w|^{-2} \text{ для } |w| \geq 1,$$

из которых легко следуют оценки (1.55) - (1.57).

1^o. Далее мы рассмотриваем равномерное приближение целыми функциями на Δ_α сначала для случая $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ в Теореме 1.1, затем - для $\alpha \in (0, \pi)$ в Теореме 1.2.

Теорема 1.1 *Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$. Существует целая функция g, удовлетворяющая*

$$|f(z) - g(z)| < 2\varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha, \tag{1.58}$$

рост которого для $r \geq 0$ ограничивается неравенством: в случае $\alpha = \pi$

$$\log M_g(r) < c\,(1 + r)\,[\log^+ M_f(t, \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1} M_{f''}(t, \gamma_\alpha) + \varepsilon^{-1}], \tag{1.59}$$

где $t = r + 10$ и $c > 0$ зависит от $|f'(0)|$; в случае $\alpha > \pi$

$$\log M_g(r) < c\varepsilon^{-2\rho/3}\,(1 + r)^\rho\,[\log^+ M_f(t, \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1} M_{f''}(t, \gamma_\alpha) + \varepsilon^{-1}], \tag{1.60}$$

где $t = 2(r + 10)$ и $c > 0$ зависит от α, $|f'(0)|$ и $M_{f''}(r_\alpha + 2)$).

Доказательство. Пусть $F \in A(\Lambda)$ - функция, построенная в Лемме 1.3 для f. Положим $\Gamma = \partial\Lambda$ и пусть $\delta = d_\alpha(\zeta)$ для $\zeta \in \Gamma$. Тогда $\delta = 1$ для $\alpha = \pi$; если же $\alpha > \pi$, то $\delta = 1$, если $|\zeta| > r_\alpha$, и

$$\delta = \delta_{\varepsilon,\alpha} = [ca_{r_\alpha}]^{-2/3} = c_{f,\alpha}\varepsilon^{2/3} \text{ для } |\zeta| \leq r_\alpha,$$

с $c_{f,\alpha} \in (0, 1)$, зависящей от α, $|f'(0)|$ и $M_{f''}(r_\alpha + 2)$ (см. Лемму 1.3). Таким образом условие $\zeta \in \Gamma$ влечет $|\zeta| \geq 1$ для $\alpha = \pi$ и $|\zeta| \geq \delta_{\varepsilon,\alpha}$ для $\alpha > \pi$.

Пусть $h_b(\zeta, z)$ - функция из Леммы 1.4 и положим $h(\zeta, z) = h_{b_{|\zeta|}}(\zeta, z)$ для $(\zeta, z) \in \Lambda \times \mathbb{C}$, где

$$b_t = \log^+ M_F(t) + s_{\alpha-\pi}[2\log(t+1)/c_{f,\alpha}] + \log(44k/\varepsilon) \text{ для } t \geq 0, \tag{1.61}$$

с постоянной $k \geq 1$, подлежащей выбору. Положим

$$g(\zeta, z) = F(\zeta)[h(\zeta, z) - C_\zeta(z)]\omega_\alpha(\zeta, z), \tag{1.62}$$

где $\omega_\alpha \equiv 1$ для $\alpha > \pi$ и $\omega_\pi = \omega$ - функция, определенная в Лемме 1.5. Тогда по (1.53) и (1.61) - (1.62), функция $g(\zeta, z)$ удовлетворяет для $(\zeta, z) \in \Gamma \times (\Delta_\alpha \cup \overline{D}_{|\zeta|/2})$ неравенству:

$$|g(\zeta, z)| \leq (\varepsilon/k)(1 + |\zeta|)^{-2} \text{ если } \alpha > \pi. \tag{1.63}$$

Аналогичная (1.63) оценка для $\alpha = \pi$ следует из (1.55) - (1.56) и (1.61) -(1.62):

$$|g(\zeta, z)| \leq (4\varepsilon/k)\,|\zeta - z|^{-2} \text{ для } (\zeta, z) \in \Gamma \times \Delta_\pi, \tag{1.64}$$

вместе с

$$|g(\zeta, z)| \leq (4\varepsilon/k)e^{2r}\min\{1, |\zeta - z|^{-2}\} \text{ для } (\zeta, z) \in \Gamma \times \mathbb{C}, \tag{1.65}$$

где $r = |z|$.

Положим $\Lambda_t = \Lambda \cap \overline{D}_t$, $\partial\Lambda_t = \Gamma_t \cup L_t$, где $L_t = \partial D_t \cap \Lambda^o$ для $t \geq 0$. Мы считаем $\Gamma = \partial\Lambda$ и $\partial\Lambda_t$ положительно ориентироваными относительно Λ^o и Λ_t^o соответственно, с индуцированной ориентацией на Γ_t и L_t. Из (1.63) - (1.65) следует, что несобственный интеграл

$$I_{t,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_t} g(\zeta, z)d\zeta \tag{1.66}$$

равномерно сходится для $z \in \overline{D}_{t/2} \cup \Delta_\alpha$, если $\alpha > \pi$, и для $z \in \overline{D}_{t-1} \cup \Delta_\pi$, если $\alpha = \pi$, определяя соответственно функцию $I_{t,\alpha} \in A(D_{t/2} \cup \Delta_\alpha)$ и $I_{t,\pi} \in A(D_{t-1} \cup \Delta_\alpha)$. Если $z \in \Delta_\alpha$ с $\alpha > \pi$, тогда по (1.63)

$$|I_{t,\alpha}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi k}\int\limits_{\Gamma}(1 + |\zeta|)^{-2}\,|d\zeta| < \varepsilon, \tag{1.67}$$

фиксируя достаточно большую постоянную $k = k_\alpha > 0$. В случае $k_\pi > 2$ оценка (1.64) влечет

$$|I_{t,\pi}(z)| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi k} \int\limits_{\Gamma} |\zeta - z|^{-2}\, d\zeta = \frac{2\varepsilon}{k} < \varepsilon. \tag{1.68}$$

Используя (1.65), мы для $\zeta \in \Gamma \backslash \Gamma_t$ с $t > 1$ и $|z| = r \leq t - 1$ получим, что

$$|I_{r,\pi}(z)| \leq e^{2r} \frac{2\varepsilon}{\pi k} \int\limits_{\Gamma \backslash \Gamma_t} |\zeta - z|^{-2}\ |d\zeta| < \varepsilon e^{2r}. \tag{1.69}$$

Определим теперь искомую целую функцию g по формуле

$$g(z) = I_{t,\alpha}(z) + I'_{t,\alpha}(z) + I''_{t,\alpha}(z) \text{ для } z \in D_t, \tag{1.70}$$

с $I_{r,\alpha}(z)$ определенной по (1.66) и

$$\begin{aligned} I'_{t,\alpha}(z) \ &: = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t} F(\zeta) h(\zeta, z) \omega_\alpha(\zeta, z) d\zeta, \\ I''_{t,\alpha}(z) \ &: = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_t} F(\zeta) C_\zeta(z) \omega_\alpha(\zeta, z) d\zeta. \end{aligned}$$

Определение (1.70) фактически не зависит от t, поскольку если $t' > t > r = |z|$, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial(\Lambda_{t'} \backslash \Lambda_t)} F(\zeta) C_\zeta(z) \omega(\zeta - z) d\zeta = 0,$$

что позволяет заменить в (1.70) t на t'.

Для доказательства оценки (1.58), пусть $z \in \Delta_\alpha$ и $t > r = |z|$. Тогда по формуле Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \Lambda_t} F(\zeta) C_\zeta(z) \omega_\alpha(\zeta - z) d\zeta,$$

и из (1.70) следует, что $g(z) = F(z) + I_0(z)$ с $I'_0(z) = I''_0(z) = 0$, так что по (1.66) - (1.67), $|g(z) - F(z)| < \varepsilon$, и с учетом (1.37) мы приходим к оценке (1.58).

Наконец, для доказательства (1.59) - (1.60), пусть $z \in \mathbb{C}$ с $r \geq \delta$ и положим в (1.70) $t = 2r$, если $\alpha > \pi$ и $t = r + 1$, если $\alpha = \pi$. Тогда по (1.67) и (1.69),

$$|I_{r,\alpha}(z)| < \varepsilon \exp(2 s_{\alpha - \pi} t) \text{ для } \alpha \geq \pi. \tag{1.71}$$

Для оценки $I'_{t,\alpha}(z)$ и $I''_{t,\alpha}(z)$ для $\alpha \geq \pi$, отметим, что согласно (1.54), рост функции $h(\zeta, z)$ ограничивается для $\zeta \in \Gamma_t$ и $\delta \leq |\zeta| \leq t$ неравенством:

$$|h(\zeta, z)| < \exp\left\{c_\alpha b_t \delta^{-\rho} (r+1)^\rho\right\}, \tag{1.72}$$

где $b_t > 1$ определен в (1.61) и $c_\alpha > 0$ зависит лишь от α. Кроме того, из определении ω_α и (1.57),

$$|\omega_\alpha(\zeta, z)| < \exp(4s_{\alpha-\pi}t), \tag{1.73}$$

$$|F(\zeta)| \leq \exp\{\log^+ M_F(r)\} \leq \exp\{b_t\}, \tag{1.74}$$

и

$$|C_\zeta(z)| \leq (t-r)^{-1} \leq \min\{1, 2/t\}. \tag{1.75}$$

Из определения $I'_r(z)$ в (1.70) и из (1.72) - (1.74) для $\alpha \geq \pi$ с $c'_\alpha > c_\alpha + 4$ следует:

$$|I'_t(z)| \leq \exp\left\{c'_\alpha b_t \delta^{-\rho} (r+1)^\rho\right\}. \tag{1.76}$$

Эта же оценка выполнется также для $|I''_t(z)|$, используя (1.70) и (1.73) - (1.75):

$$|I''_t(z)| \leq \exp\{b_t + 4s_{\alpha-\pi}t\} \leq \exp\left\{c'_\alpha b_t \delta^{-\rho} (t+1)^\rho\right\}. \tag{1.77}$$

Суммируя, мы по (1.70) - (1.71) и (1.76) - (1.77) получим, что для постоянной $c''_\alpha > 0$

$$|g(z)| < \exp\left\{c''_\alpha b_t \delta^{-\rho} (r+1)^\rho\right\}, \text{для } z \in \mathbb{C},$$

что влечет

$$\log M_g(r) \leq c_\alpha \delta^{-\rho} (r+1)^\rho b_t \text{ для } r \geq 0, \tag{1.78}$$

где $t = 2r$ для $\alpha > \pi$ и $t = r + 1$ для $\alpha = \pi$.

Оценки (1.59)-(1.60) Теоремы 1.1 непосредственно следуют из (1.78), (1.52), и (1.61), с учетом того, что для $\alpha > \pi$

$$\delta = \delta(t) = c_{f,\alpha} \varepsilon^{2/3} \text{ для } t \leq r_\alpha,$$

и $t^{1-\rho} \log(t+1) \leq \log 2$ для $t \geq 1$. Таким образом теорема полностью доказана. □

Следствие 1.1 *Пусть* $f \in A''(\Delta_\alpha)$ *для* $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ *и для некоторого* $\nu \geq 0$

$$\log M_f(r, \Delta_\alpha) = O(r^\nu), \ \text{и } M_{f''}(r, \gamma_\alpha) = O(r^\nu) \text{ при } r \to \infty.$$

Тогда для $\varepsilon \in (0, 1]$ *существует целая функция* g*, удовлетворящая к (1.58), так что при этом* g *имеет рост не выше порядка* $\rho + \nu$ *и типа* σ*,*

$$\sigma \leq \begin{cases} c/\varepsilon \quad \text{для } \alpha = \pi, \\ c/\varepsilon^{1+2\rho/3} \text{ для } \alpha > \pi, \end{cases}$$

где $c > 0$ *не зависит от* ε*.*

2^o Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (0, \pi)$ с $\rho = \pi/(2\pi - \alpha) \in (1/2, 1)$. Для равномерного приближения целыми функциями на Δ_α функций $f \in A''(\Delta_\alpha)$ нам нужны новые характеристики для f. Положим $f_\rho(w) = f(w^{1/\rho})$ для $w \in \Delta_{\alpha\rho}$, так что

$$(f''_\rho)(z^\rho) = \rho^{-2}\left\{z^{1-\rho}[z^{1-\rho}f'(z)]'\right\} \text{ для } z \in \Delta_\alpha \backslash \{0\}. \tag{1.79}$$

Необходимая характеристика для $r \geq 1$ является величина

$$\begin{aligned} \mu_f(r, \gamma_\alpha) = & \max_{1 \leq |z| \leq r} \{\rho^2 \left|(f''_\rho)(z^\rho)\right| : \ z \in \gamma_\alpha\} \\ = & \max_{1 \leq |z| \leq r} \{\left|z^{1-\rho}[z^{1-\rho}f'(z)]'\right| : \ z \in \gamma_\alpha\}. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Положим $\mathbf{f} = f - \lambda \in A''(\Delta_\alpha)$, где $\lambda(z) = f(0) + f'(0)[1 + C_{-1}(z)$ для $z \neq -1$. Тогда $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}'(0) = 0$, откуда следует, что формула (1.79) для $\mathbf{f}''_\rho$ выполняется также для $z = 0$. Из теоремы о средном значении следует, что

$$\left|\mathbf{f}''_\rho(z^\rho)\right| \leq 2M_{f''}(1, \gamma_\alpha) := c_f \text{ для } z \in \gamma_\alpha, \ |z| \leq 1, \tag{1.81}$$

так что по (1.79) - (1.80) для функции $\mathbf{f}$,

$$M_{\mathbf{f}''_\rho}(r^\rho, \gamma_{\alpha\rho}) \leq 4\mu_{\mathbf{f}}(r, \gamma_\alpha) + c_f \text{ для } r \geq 0. \tag{1.82}$$

Отметим, что для $z \in \Delta_\alpha$

$$\lambda(z) = O(1), \ \lambda'(z) = O(|z|^{-2}), \ \lambda''(z) = O(|z|^{-3}), \text{ при } |z| \to \infty,$$

так что по (1.80)

$$\mu_{\mathbf{f}}(r,\gamma_\alpha) \le \mu_f(r,\gamma_\alpha)+\mu_\lambda(r,\gamma_\alpha)$$
$$\le \mu_f(r,\gamma_\alpha)+O(r^{-1-2\rho}) \text{ при } r\to\infty. \tag{1.83}$$

Положим теперь

$$g_\lambda(z)=f(0)+f'(0)[1+h_b(-1,z)] \text{ для } z\in\mathbb{C}$$

где $h_b(-1,z)$ целая функция из Леммы 1.4 с $\delta=1$ и

$$b=\log^+|f(0)|+\log^+|f'(0)|+\log(44/\varepsilon).$$

Тогда целая функция g_λ удовлетворяет по (1.54) - (1.55) неравенствам

$$|g_\lambda(z)-\lambda(z)|<\varepsilon \text{ для } z\in\Delta_\alpha, \tag{1.84}$$

$$\log|g_\lambda(z)|\le c_\alpha b\,(|z|+1)^\rho \text{ для } z\in\mathbb{C}. \tag{1.85}$$

Это и (1.81) - (1.83) позволяют свести приближение функции f к приближению функции $\mathbf{f}\in A''(\Delta_\alpha)$.

Пусть $\zeta=re^{i\theta}$ с $|\theta|<\pi$. Тогда $\zeta^\rho=r^\rho e^{i\rho\theta}$, и $\zeta\in\Delta_\alpha \iff \zeta^\rho\in\Delta_{\alpha\rho}$. Если теперь $\zeta\notin\Delta_\alpha$, то $\zeta^\rho\notin\Delta_{\alpha\rho}$, и

$$d(\zeta^\rho,\gamma_{\alpha\rho})=r^\rho\sin[\rho(|\theta|-\alpha/2)]\le r^{\rho-1}d(\zeta,\gamma_\alpha),$$

так что $d(\zeta^\rho,\gamma_{\alpha\rho})\le 1$, если $d(\zeta,\gamma_\alpha)=\min\{1,r^{1-\rho}\}$ для $r\ge 0$.

Полагая

$$\Omega_\alpha=\{\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-: d(\zeta,\Delta_\alpha)\le\min\{1,|\zeta|^{1-\rho}\}, \tag{1.86}$$

имеем, что $\Delta_\alpha\subset\Omega_\alpha$ и $\zeta\in\Omega_\alpha\backslash\Delta_\alpha$ влечет $d(\zeta^\rho,\gamma_{\alpha\rho})\le 1$.

Применив к $\mathbf{f}_\rho$ и к $\Delta_{\alpha\rho}$ Лемму 1.3 с $\Lambda=\Delta^1_{\alpha\rho}$, мы для $\varepsilon\in(0,1]$ получим функцию $\mathbf{F}_\rho\in A(\Delta^1_{\alpha\rho})$, с $\mathbf{F}_\rho(0)=0$, удовлетворяющей к (1.37) и (1.38) вместе с (1.36). Положив

$\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}_\rho(z^\rho)$ для $z \in \Omega_\alpha$, так что $\mathbf{F} \in A(\Omega_\alpha)$, и учитывая что $\mathbf{f}(z) = \mathbf{f}_\rho(z^\rho)$ для $z \in \Delta_\alpha$, получим:

$$|\mathbf{f}\,(z) - \mathbf{F}\,(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha. \tag{1.87}$$

Рост $\mathbf{F}$ в Ω_α ограничен согласно к (1.36), (1.38) и (1.81) - (1.83), неравенством

$$M_{\mathbf{F}}\,(r) < c'[1 + M_f\,(r+2, \Delta_\alpha)] + \exp\{c''\varepsilon^{-1}[\mu_f\,(r+6, \gamma_\alpha) + 1]\}, \tag{1.88}$$

где $c' > 0$ и $c'' > 0$ постоянные, независящие от ε и $r \geq 0$.

Отметим также, что поскольку $M_{\mathbf{F}_\rho}\,(1) = M_{\mathbf{F}}\,(1)$, то по неравенству Коши:

$$\left|\mathbf{F}_\rho'(w)\right| \leq M_{\mathbf{F}}(1)(1 - |w|)^{-1} \text{ для } |w| < 1,$$

так что по неравенству о средном значении

$$|\mathbf{F}_\rho(w)| \leq M_{\mathbf{F}}(1)\,|w|\,/(1 - |w|) \text{ для } |w| < 1.$$

Положив $w = z^\rho$, получим для $z \in \Omega_\alpha$

$$|\mathbf{F}(z)| \leq M_{\mathbf{F}}(1)\,|z|^\rho\,/(1 - |z|^\rho)^{-1} \leq 2M_{\mathbf{F}}(1)\,|z|^\rho \text{ если } |z| \leq 2^{-1/\rho}. \tag{1.89}$$

Суммируя, приходим к следующей лемме.

Лемма 1.6 *Пусть $f \in A''\,(\Delta_\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда $f = \mathbf{f} + \lambda$ с $\mathbf{f} \in A''(\Delta_\alpha)$ и дробно-линейной функцией λ, так что: i) $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}'(0) = 0$, и для $\mathbf{f}$ существует функция $\mathbf{F} \in A\,(\Omega_\alpha)$, удовлетворящей к (1.87) - (1.89). ii) λ допускает приближение вида (1.84) целыми функциями g_λ с ростом (1.85).*

Теперь мы готовы формулировать и доказать теорему об оптимально равномерном приближении для случия $\alpha < \pi$.

Теорема 1.2 *Пусть $f \in A''\,(\Delta_\alpha)$ и $\alpha < \pi$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция g такая, что*

$$|f\,(z) - g\,(z)| < 3\varepsilon \textit{ для } z \in \Delta_\alpha \tag{1.90}$$

и рост g ограничен для $r \geq 0$ неравенством

$$\log M_g(r) < c(1+r^\rho)[\log^+ M_f(r', \Delta_\alpha) + \varepsilon^{-1}\mu_f(r', \gamma_\alpha) + \log^+ r + \exp(c\varepsilon^{-1})], \tag{1.91}$$

где $\mu_f(r, \gamma_\alpha)$ определен в (1.80), $r' = 2(r+3)$ и $c > 0$ постоянная, независящая от ε и r.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F} \in A(\Omega_\alpha)$ - функция, построенная в Лемме 1.6 для функции $\mathbf{f}$, с замкнутой областью Ω_α, определенной по (1.86). Для Теоремы 1.2 достаточно построить подходящее целое приближение $\mathbf{G}$ функции $\mathbf{F}$ на Δ_α с оценкой роста $\mathbf{G}$ на $\mathbb{C}$.

Рассмотрим для этого замкнутую область

$$\Lambda_\alpha = \{z = re^{i\theta} \in \Omega_\alpha : |\theta| \leq (\alpha+\pi)/2\},$$

так что $\Delta_\alpha \subset \Lambda_\alpha \subset \Omega_\alpha$. При этом, для $\Gamma = \partial\Lambda_\alpha$, имеем, что$\Gamma \backslash D_1 = \partial\Omega_\alpha \backslash D_1$ и $\Gamma \backslash D_1 = L^+ \cup L^-$ с $L^\pm = [0, e^{\pm i(\alpha+\pi)/2}]$.

Пусть $h_b(\zeta, z)$ будет функцией в Лемме 1.4, и для $(\zeta, z) \in \Gamma \times \mathbb{C}$ положим

$$h(\zeta, z) = \begin{cases} h_{b_{|\zeta|}}(\zeta, z), \text{ если } |\zeta| \geq \delta_0, \\ 0, \text{ если } |\zeta| < \delta_0, \end{cases}$$

где

$$b_t = \log^+ M_{\mathbf{F}}(t) + \log(\varepsilon\delta_0)^{-1} + \log(44k) + 3\log(|t|+1), \tag{1.92}$$

с $\delta = d(\zeta, \gamma_\alpha) = \min\{|\zeta|, |\zeta|^{1-\rho}\}$ для $\zeta \in \Gamma$, $|\zeta| \geq \delta_0$, где $\delta_0 \in (0, 2^{-1/\rho})$ и $k \geq 1$ постоянные, подлежащей выбору. Рассмотрим для $(\zeta, z) \in \Gamma \times \mathbb{C} \backslash \{\zeta\}$ функцию

$$g(\zeta, z) = \mathbf{F}(\zeta)[h(\zeta, z) - C_\zeta(z)], \tag{1.93}$$

которая согласно (1.53), (1.92) и (1.93) удовлетворяет для $(\zeta, z) \in \Gamma \times (\Delta_\alpha \cup \overline{D}_{|\zeta|/2})$ неравенству

$$|g(\zeta, z)| < (\varepsilon/k)(\delta_0/\delta)(1+|\zeta|)^{-2}, \text{ если } |\zeta| \geq \delta_0, \tag{1.94}$$

и для $(\zeta, z) \in (\Gamma \cap D_{\delta_0}) \times \Delta_\alpha$ - неравенству

$$|g(\zeta, z)| < 2M_{\mathbf{F}}(1)\, |\zeta|^{\rho - 1}\,. \tag{1.95}$$

Обозначим $\Gamma_t = \Gamma \cap \overline{D}_t$ и $L_t = \Lambda_\alpha \cap \partial \overline{D}_t$ для $t \geq \delta_0$. По (1.94), несобственный интеграл

$$I_t(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_t} g(\zeta, z) d\zeta, \tag{1.96}$$

равномерно сходится для $z \in \overline{D}_{t/2} \cup \Delta_\alpha$, определяя функцию $I_t \in A(D_{t/2} \cup \Delta_\alpha)$.

Из (1.95) - (1.96) что для $z \in \Delta_\alpha$ следует, что

$$|I_0(z) - I_{\delta_0}(z)| \leq \pi^{-1} M_{\mathbf{F}}(1) \delta_0^\rho \leq \varepsilon/3, \tag{1.97}$$

если фиксировать $\delta_0 = \varepsilon^{1/\rho}[M_{\mathbf{F}}(1) + 1]^{-1/\rho}$. Аналогично, по (1.94) и (1.96), для $z \in \Delta_\alpha$ имеем:

$$|I_1(z) - I_{\delta_0}(z)| \leq \varepsilon / \pi k < \varepsilon/3. \tag{1.98}$$

Пусть теперь $t \geq 1$ и $z \in \overline{D}_{t/2} \cup \Delta_\alpha$. Тогда по (1.94) и (1.96), учитывая, что согласно (1.86), $|d\zeta| \leq k_\alpha d\, |\zeta|$ для $\zeta \in \Gamma$, $|\zeta| \geq 1$, получим

$$|I_t(z))| \leq (\varepsilon k_\alpha / k) \leq \varepsilon/3, \tag{1.99}$$

фиксируя $k = 3k_\alpha + 1$.

Определим теперь искомую целую функцию $\mathbf{G}$ по формуле

$$\mathbf{G}(z) = I_t(z) + I'_t(z) + I''_t(z) \text{ для } z \in D_t, \tag{1.100}$$

где $I_t(z)$ опредлен в (1.96) и

$$\begin{aligned} I'_t(z) \quad &: \quad = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t} \mathbf{F}(\zeta) h(\zeta, z) d\zeta, \\ I''_t(z) \quad &: \quad = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_t} \mathbf{F}(\zeta) C_\zeta(z) d\zeta. \end{aligned}$$

Опредление (1.100) очевидно не зависит от t, поскольку если $t' > t > r = |z|$, то по теоремы Коши будет

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial(\Omega_{t'} \setminus \Omega_t)} \mathbf{F}(\zeta) C_\zeta(z) d\zeta = 0,$$

что позволяет заменить в (1.100) t на t'.

Далее, по теореме Коши, из (1.96) и (1.100) для $z \in \Delta_\alpha$ следует, что $\mathbf{G}(z) - \mathbf{F}(z) = I_0(z)$, и поскольку $I_0 = I_1 + (I_1 - I_{\delta_0}) + (I_0 - I_{\delta_0})$, то мы по (1.97) - (1.99) получим, что

$$|\mathbf{G}(z) - \mathbf{F}(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha. \tag{1.101}$$

Для оценки роста $\mathbf{G}$ в $\mathbb{C}$, отметим, что согласно выбору функции $h(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Gamma$ (с $h(\zeta, z) \equiv 0$ для $|\zeta| \le \delta_0$) из (1.54) следует, что для $z \in \mathbb{C} \backslash D_{|\zeta|/2}$

$$|h(\zeta, z)| < \exp\left\{c_\alpha (b_1/\delta_0)\left(|z| + 1\right)^\rho\right\}, \text{ если } \delta_0 \le |\zeta| \le 1, \tag{1.102}$$

и

$$|h(\zeta, z)| < \exp\left\{c'_\alpha b_{|\zeta|} \, |z|^\rho\right\}, \text{ если } |\zeta| > 1, \tag{1.103}$$

где $\rho = \pi/(2\pi - \alpha)$ и $c_\alpha > 0$, $c'_\alpha > 0$ зависят лишь от α.

Используя оценки (1.102) - (1.103) и оценивая (как в доказательстве Теоремы 1.1) интегралы $I'_t(z)$ и $I''_t(z)$ для $t = 2\,|z|$, получим

$$\log^+ M_{\mathbf{G}}(r) \le c''_\alpha (r+1)^\rho [b_1/\delta_0 + b_{2r} + 1] \text{ для } r \ge 0.$$

Отсюда, используя определение (1.92) и оценку (1.88) как в Замечание 1.2, мы для $r \ge 0$ получим:

$$\begin{aligned} \log^+ M_{\mathbf{G}}(r) \le \quad & c(r+1)^\rho [\log^+ M_f\left(r', \Delta_\alpha\right) + \varepsilon^{-1} \mu_f\left(r', \gamma_\alpha\right) \\ & + \log^+ r + \exp(c\varepsilon^{-1})], \end{aligned} \tag{1.104}$$

где $r' = 2(r+3)$ и $c > 0$ независит от ε и r.

Теперь мы можем определить искомую целую функцию g, положив $g = \mathbf{G} + g_\lambda$. Тогда (1.90) следует из (1.84), (1.87) и (1.101), и оценка (1.91) следует из (1.85) и (1.104). Это завершает доказательство Теоремы 1.2. □

Следствие 1.2 *Пусть $f \in A''\left(\Delta_\alpha\right)$ для $\alpha \in (0, \pi)$ и для некоторог $\nu \ge 0$*

$$\log M_f(r, \Delta_\alpha) = O(r^\nu) \textit{ and } \mu_f(r, \gamma_\alpha) = O(r^\nu) \textit{ при } r \to \infty.$$

Тогда функцию f можно равномерно приблизить на Δ_α целыми функциями порядка $\rho + \nu$, и нормального типа, если $\nu > 0$.

Глава 2

Равномерное и касательное приближение мероморфными функциями

2.1 Предварительные сведения

Основная задача этой главы состоит в построении мероморфных функций, осуществляющих равномерное или касательное приближение функций на полосе (угле) с возможно медленным ростом на комплексной плоскости. Этот рост будет измеряется ростом неванлинновской характеристики $T(r,g)$ аппроксимирующей функции g. Эта задача не сводится прямо к аналогичной задаче приближения целыми функциями, однако некоторые заготовки для решения последной будут нами существенно использованы. В этой главе мы пользуемся обозначениями и определениями введеных в первой главе и нам дополнительно будут нужны еще некоторые новые.

Для функции $f \in A(E)$ обозначим через f_∂ сужение функции f на ∂E.

Положим также

$S_h := \mathbb{R} \times [-h, h]$ для $h > 0$ -полоса ширины $2h$;

$\Delta_\alpha := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \leq \alpha/2\}$ для $\alpha \in (0, 2\pi)$ -угол;

$\Delta_\alpha(\beta) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta - \beta| \leq \alpha/2\}$ для $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$;

$\Delta_\alpha(\beta, a) := \{\zeta \in \mathbb{C} : (\zeta - a) \in \Delta_\alpha(\beta)\}$ для $a \in \mathbb{C}$ -угол с центром a;

$\Omega_h^\alpha := \mathbb{C} \setminus (\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^o \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^o) \cup S_{2h}$ для $h > 0$;

$\Omega_{h,r}^\alpha := \Omega_h^\alpha \cap \overline{D}_r$ для $h > 0$, $r > 0$;

$\Delta_{\alpha,r} := \Delta_\alpha \cap \overline{D}_r$ для $r > 0$ и $\alpha \in (0, 2\pi)$;

$\gamma_\alpha = \partial\Delta_\alpha$ и $\gamma_{\alpha,r} = \gamma_\alpha \cap \overline{D}_r$.

Нам понадибаться также функция Неванлинны $\log^+ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, определенный следующим образом:

$$\log^+ x = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ \log x, \text{ если } x \ge 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\log^+$ неотрицательная и неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$.

Неванлинновская характеристика $T(r, g)$ мероморфной функций g, $g(0) \neq \infty$ определяется формулой

$$T(r, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta + \int_0^r n(t, g)\, t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ число *полюсов* g в D_t (с учетом кратности).

Пусть теперь $f \in C(E)$, где $E \subset \mathbb{C}$ замкнутое и неограниченное множество, так что $E \cap \partial D_r \neq \emptyset$ для $r \ge r_0 \ge 0$. Обозначим для $r \ge r_0$

$$M_f(r) = M(f, E) := \|f\|_{E \cap D_r}.$$

2. Обозначим через B класс неубывающих C^1-функций $q \ge 0$ в $\mathbb{R}^+$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rq'(r)}{q(r)} = \rho.$$

Полагая

$$q(r) = r^{\rho(r)},\ \rho(r) := \frac{\log q(r)}{\log r} \text{ для } r > 0,$$

имеем, что функция $r \to \rho(r)$ является *уточненным порядком* в смысле Валирона (см. книгу Левина [27]).

Для неубывающих функций $\mu \ge 0$ на $[r_0, +\infty)$ величина

$$\rho_\mu := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \mu(r)}{\log r}$$

называется порядком μ. Если $\nu \geq 0$ другая неубываюшая функция на $[t_0, +\infty)$ конечного порядка, то величина

$$\sigma_\mu^\nu := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \mu(r)}{\nu(r)}$$

называется ν-типом функции μ.

Пусть теперь $E \subset \mathbb{C}$ замкнутое и ограниченное множество, так что $E \cap \partial D_r \neq \emptyset$ для $r \geq r_0$. Так как в [19], мы здесь тоже используем следующую терминологию для функций $f \in C(E)$.

1. *Степенью* f на E является величина $d_f = d_f(E) := \rho_\mu$ для $\mu = M_f$.

2. *ν-типом* f на E будет $\sigma_f^\nu = \sigma_f^\nu(E) := \sigma_\mu^\nu$ для $\mu = M_f$.

3. Для $\mu = \log^+ M_f$ величины $\rho_f = \rho_f(E) := \rho_\mu$, $\sigma_f = \sigma_f(E) := \sigma_\mu$ соответственно будут *порядком* и *типом* f на E.

В случае приближении целыми функциями достаточно было функцию из класса $A''(S_h)$ приблизить функциями из класса $A(S_{2h})$ и при этом оценить рост аппроксимирующих функций, но в случае мероморфных приближений необходимо, чтобы аппроксимирующие функции были голоморфны в области, ширина которого стремился к бесконечности, при возростании модуля $z \in S_h$, а также содержала полосу S_{2h}. Поэтому нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 2.1 *Пусть $f \in A''(S_h)$ и $\varphi \in A(\Omega_h^\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ такая, что*

$$\|f\varphi - F\|_{S_h} < \varepsilon, \tag{2.1}$$

$$M_F(r) < 3M_f(lr + h)\, M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\{ca_{2r} + 3\log(lr + 1)\} \tag{2.2}$$

где

$$a_r(f, \varphi) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \{|z|\,|f''_\partial(z)| + |z|\,|f'_\partial(z)|\}\, M_\varphi(r) \tag{2.3}$$

для $r > 0$, $l = 1 + \tan(\alpha/2) > 1$ и $c = c(h, \alpha) > 0$ константа, зависящая лишь от α и от h.

Доказательство. Доказательство основано на методе, развитом в доказательстве Леммы 5 из [19]. Заменяя f на $\varepsilon^{-1}f$ и F на $\varepsilon^{-1}F$, можно свести доказательство к случаю, когда $\varepsilon = 1$.

Продолжим функцию f как в Лемме 5 из [19]: положив $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in S_h$ и

$$f_*(\zeta) := if(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) + (1 - i) f(\xi + ih\sigma_\eta) \tag{2.4}$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \backslash S_h$; здесь σ_η функция знака, то есть $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_\eta = \eta / |\eta|$ для $\eta \neq 0$. Из (2.4) следует, что $f_* \in C^1(\mathbb{C})$. Для роста функции f_* на Ω_h^α из (2.4) следует неравенство

$$M_{f_*}(r, \Omega_h^\alpha) \leq 3M_f(lr + h, S_h) \text{ для } r \geq 0. \tag{2.5}$$

Очевидно $\overline{\partial} f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in S_h$. При этом, из (1.2) и (2.4) для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \backslash S_h$. следует, что

$$2\overline{\partial} f_*(\zeta) = (1 - i)\left[f'(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) - f'(\xi + ih\sigma_\eta)\right] \tag{2.6}$$

Очевидно, что $f_* \in A''(\Omega_h^\alpha)$ и мы из (2.6) получим оценку:

$$\left|\overline{\partial} f_*(\zeta)\right| \leq (|\eta| - h) M_{f''}(l|\xi| + h, \partial S_h) \text{ для } \zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h. \tag{2.7}$$

Следующее неравенство следует из (2.3) и (2.7):

$$\left|\left(\varphi\overline{\partial} f_*\right)(\zeta)\right| \leq c(|\eta| - h) a_{|\xi|} / |\xi| \text{ для } \zeta = \xi + i\eta \in \Omega_h^\alpha. \tag{2.8}$$

где $c > 0$ константа, зависящая лишь от α и h.

Чтобы построить аппроксимирующую функцию F, мы должны реализовать, для любого фиксированного полюса $\zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h^o$, конструктивную аппроксимацию ядры Коши $C_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$ для $z \in S_h$ голоморфными функциями от z и ограниченных в Ω_h^α. При этом, аппроксимация $C_\zeta(z)$ необходимо реализовать не только для $z \in S_h$, но и для любого компактного подмножества Ω_h^α, если $|\zeta|$ достаточно велик. Очевидно, что приближения такого типа равносильно приближению нуль-функции функциями, голоморфными в Ω_h^α, равны 1 в точке $\zeta \in \Omega_h^\alpha$.

Пусть $\zeta \to n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ -кусочно постоянная функция; мы фиксируем $n(|\zeta|)$ условием

$$0 \le a_{|\zeta|} - n(|\zeta|) < 1 \text{ для } \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha. \tag{2.9}$$

Для $(\zeta, z) \in (\Omega_h^\alpha)^2$ определим функцию $Q_\zeta(z) = Q(\zeta, z) \in H(\Omega_h^\alpha)$ такую, что $Q_\zeta(\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha$:

$$Q(\zeta, z) := \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^{n(|\zeta|)} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^{3\ln|\zeta|}, \tag{2.10}$$

где ζ_0 для ζ мы выберем так, чтобы $\operatorname{Re}\zeta_0 = \operatorname{Re}\zeta$ для любого $\zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h$ и $2d(\zeta, \partial S_h) = d(\zeta_0, \partial S_h)$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$.

Из формулы и теоремы Коши следует, что

$$\int_{\partial D} Q_\zeta(z)\, C_\zeta(z)\, dz = \begin{cases} -2\pi i, \text{ если } \zeta \in D \\ 0, \text{ если } \zeta \in \Omega_h^\alpha - \overline{D} \end{cases} \tag{2.11}$$

для любой жордановой области $D \subset \Omega_h^\alpha$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей.

Теперь для $r > 0$ рассмотрим интегралы

$$I_r(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_{h,r}^\alpha \backslash S_h} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Omega_{h,r}^\alpha, \tag{2.12}$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = \left(\varphi \overline{\partial} f_*\right)(\zeta)\, Q_\zeta(z)\, C_\zeta(z)$.

Введем функции $F_r \in C\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)$ следующим образом

$$F_r(z) = (\varphi f_*)(z) + I_r(z) \text{ для } z \in \Omega_{h,r}^\alpha. \tag{2.13}$$

Из формулы (1.1), условия $\overline{\partial}\varphi = 0$ и теоремы Морера следует, что $F_r(z) \in H\left(\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)^o\right)$; очевидно, что $F_r \in A\left(\Omega_{h,r}^\alpha\right)$ для любого $r > 0$.

Докажем, что при $r \to \infty$ интеграл I_r локально-равномерно сходиться на Ω_h^α к несобственному интегралу

$$I_\infty(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_h^\alpha \backslash S_h} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Omega_h^\alpha.$$

Тогда по (2.13), искомую функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ можно определить формулой

$$F(z) := (\varphi f_*)(z) + I_\infty(z) \text{ для } z \in \Omega_h^\alpha. \tag{2.14}$$

Из определения (2.14) следует, что

$$\|\varphi f - F\|_{S_h} = \|I_\infty\|_{S_h}, \tag{2.15}$$

$$|F(z)| \leq |(\varphi f_*)(z)| + |I_\infty(z)| \text{ для } z \in \Omega_h^\alpha, \tag{2.16}$$

так что аппроксимация функции φf на S_h функциями $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ и оценка роста F на Ω_h^α сводится в этой схеме к оценке I_∞.

По (2.10) и (2.12), мы для $z \in \Omega_h^\alpha$ и $\zeta \in \Omega_h^\alpha \backslash S_h$ имеем оценку

$$|G_\zeta(z)| \leq \frac{|\varphi \overline{\partial} f_*(\zeta)|}{|\zeta - z|} \left[\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta}\right]^{n(|\zeta|)+3\ln(l|\zeta|)}, \tag{2.17}$$

где $\delta = \tan(\alpha/2)$.

Пусть $K \subset \Delta_\beta$ - компактное множество. Существует $r_0 > \max\{1, h\}$ такая, что $K \subset \overline{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < e\,|z - \zeta_0|$. Поскольку

$$\int_h^{h+|\xi|\delta} \left(\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta}\right)^{n(|\xi|)} d|\xi| < \frac{h + |\xi|\delta}{n(|\xi|) + 1}, \tag{2.18}$$

то учетом (2.8) получим:

$$|I_r(z)| < c_1 \int_{E \cap D_r} \frac{n(|\zeta|)}{|\zeta|} \left[\frac{3h + 2|\xi|\delta - |\eta|}{2h + 2|\xi|\delta}\right]^{n(|\zeta|)+3\ln(l|\zeta|)} d\sigma_\zeta$$

где $E = \Omega_h^\alpha \backslash S_h^o$ и $c_i = c_i(\alpha, h) > 0$ для $i = 1, 2, \cdots$. Отсюда следует:

$$|I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \leq c_2 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} u e^{-3\ln(lu)} du < c_2 \left(\frac{1}{r' - r_0} - \frac{1}{r'' - r_0}\right) \to 0, \tag{2.19}$$

равномерно для $z \in K$, при $r'', r' \to \infty$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость $I_\infty(z)$ для $z \in \Omega_h^\alpha$ и что $I_\infty \in A(\Omega_h^\alpha)$.

Для доказательства (2.1), мы должны оценить $|I_\infty(z)|$ для $z \in S_h$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интералов:

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_{B(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{E \backslash B(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta = J_1(z) + J_2(z), \tag{2.20}$$

где $B(z) := \{\zeta \in E : |\zeta - z| \le 2|z|\delta\}$. Для $\zeta \in E \backslash B(z)$ следует, что $|\zeta - \zeta_0| \le q|z - \zeta_0|$, где $q = q(\alpha, h) > 0$. Из (2.17)-(2.20) получим

$$|J_2(z)| < \int_1^\infty u q^{-3\ln(lu)} du < c_3. \tag{2.21}$$

Пусть $z_0 \in \partial S_h$ такая, что $dist(z, z_0) = dist(z, \partial S_h) \ge 0$. Обозначим для $z \in S_h$ множество $C(z) = \{[z_0 - 1, z_0 + 1] \times \mathbb{R}\} \cap B(z)$. Из (2.17)-(2.18) имеем

$$\int_{C(z)} |G_\zeta(z)| d\sigma_\zeta < c_4 \int_{|z_0|-1}^{|z_0|+1} du = 2c_4. \tag{2.22}$$

Учитывая, что $|\zeta - z| \le |u - |z_0||$ для $\zeta \in B(z)/C(z)$ получим

$$\int_{B(z)/C(z)} |G_\zeta(z)| d\sigma_\zeta < \int_{a|z|}^{b|z|} \frac{1}{|u - |z_0|| + 1} du < c_5 \tag{2.23}$$

где $a > 0$ и $b > 0$ постоянные зависящие лишь от α и h. Таким образом, с учетом (2.21)-(2.23) из (2.20) мы приходим к оценке (2.1).

Пусть теперь $z \in \Omega_h^\alpha$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \int_{E \backslash D(z)} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = J_3(z) + J_4(z), \tag{2.24}$$

где $D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \le 3|z|\delta\}$. Второй интеграл оценивается как в (2.21).

Учитывая, что $ne^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_4 \sqrt{mesD(z)},$$

мы по (2.18) и с учетом $|\zeta| > \delta|z|$ получим

$$J_3(z) < \exp\{kn(3l|z| + h) + 3\log(|z|)\}, \tag{2.25}$$

где $k > 0$ постоянная, зависящая лишь от α и h.

Из (2.24)-(2.25) с учетом (2.5) и (2.14) мы приходим к требуемой оценке (2.2). Таким образом лемма полностью доказана. $\square$

2.2 Мероморфное приближение на полосе

Настоящий параграф посвяшен вопросом о наилучших равномерных и касательных приближениях на полосе мероморфными функциями. Решение этой задачи конструктивно аналогичен задаче приближения целыми функциями.

И так, сначала мы приближаем функцию $F \in A\left(\Omega_h^\alpha\right)$ на S_h мероморфными функциями с оценкой их роста, затем, используя Лемму 2.1, получим мероморфную аппроксимацию $f \in A''\left(S_h\right)$ на S_h. Для этого мы будем использовать следующую лемму (см. [24], стр. 548-549).

Лемма 2.2 *Для ветви аналитической функции $z \to \sqrt{z}$, $\sqrt{1} = 1$, однозначной в области $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in [0,1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$ с полюсами на $(-\infty, -1)$ такая, что*

$$\left|\omega\left(z\right) - \sqrt{z}\right| \leq (1/2)\sqrt{|z|} \text{ для } |\arg z| \leq \pi - \delta, \ |z| \geq \delta \tag{2.26}$$

и

$$T\left(r, \omega\right) = O\left(\log^2 r\right) \text{ при } r \to \infty. \tag{2.27}$$

Теорема 2.1 *Для $F \in A\left(\Omega_h^\alpha\right)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция G с полюсами на мнимой оси такая, что*

$$\left|F\left(z\right) - G\left(z\right)\right| < \varepsilon \text{ для } z \in S_h \tag{2.28}$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1}G\right) < c\int_h^{pr}\int_h^t \log^+ \frac{M_F\left(\tau\right)}{\varepsilon}\frac{d\tau dt}{\tau t} + c\log^2\left(r + h\right) \text{ для } r \geq h, \tag{2.29}$$

где $c = c\left(h, p, \alpha\right) > 0$ постоянная зависящая лишь от h, α и p.

Доказательство. Заменяя F на $\varepsilon^{-1}F$ и G на $\varepsilon^{-1}G$, можно свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$. Положим в Лемме 2.2 $\omega\left(z\right) = \omega_\delta\left(2hiz\right)$ с $\delta = \min\{2h, 1\}$, так что

$$\left|\omega\left(\zeta\right)\right| \geq \left(2h\left|\zeta\right|\right)^{1/2} \text{ для } \zeta \in \partial S_{2h}\left(\alpha\right) \text{ и } \left|\omega\left(z\right)\right| < c_1 + c_2\left|z\right|^{1/2} \text{ для } z \in S_h. \tag{2.30}$$

Здесь и в дальнейшем через $c_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots$ будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от α, p и h. Из $S_h \subset \Omega_h^\alpha$ следует существование константы $c_3 \in (0,1)$ такой, что

$$|\zeta - z| > c_3 \left(|\zeta| + |z|\right) \text{ для } \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha \text{ и } z \in S_h. \tag{2.31}$$

Теперь рассмотрим рациональную по z и кусочно-аналитическую по $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ функцию Q такую, что $Q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$:

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right)^{n'},$$

где n' и ζ' мы выберем внизу. Положим $q = \sqrt{p} > 1$ и рассмотрим последовательность $(n_k)_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $\Gamma = \partial\Omega_h^\alpha$, $\Gamma^+ = \{\zeta \in \Gamma : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, $\Gamma^- = \{\zeta \in \Gamma : \operatorname{Im}\zeta < 0\}$ и $\Gamma_r^\pm = \Gamma^\pm \cap \overline{D}_r(\pm i2h)$. Положим $\zeta' = (q^k + 2h)i$ и для $\zeta \in \gamma_k^+ = \Gamma_{q_k}^+ \setminus \Gamma_{q_{k-1}}^+$ рассмотрим соответствующий полюс $(q^k + 2h)i$, где $q_k = q^k \sin(\alpha/2)$ и $\zeta' = -(q^k + 2h)i$ для $\zeta \in \gamma_k^- = \Gamma_{q_k}^- \setminus \Gamma_{q_{k-1}}^-$. Из $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1} \gamma_k$ с $\gamma_i = \gamma_i^+ \cup \gamma_i^-$ следует, что любому $\zeta \in \Gamma$ соответствует полюс на мнимой оси. Для $\zeta \in \gamma_k$ возмем $n' = n_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Теперь если $z \in S_h$, то согласно выбора полюсов ζ' мы имеем, что

$$|\zeta - \zeta'| \,/\, |z - \zeta'| \leq q/(q+h) \text{ для } \zeta \in \gamma_1$$

и для $\zeta \in \Gamma/\gamma_1$

$$\left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right| \leq [\cos^2(\alpha/2) + \left(1 - q^{-1}\right)^2 \sin^2(\alpha/2)]^{1/2} = d_1 < 1.$$

Существует $\mu = \mu(q, h, \alpha) \in (0,1)$, так что

$$\left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right| \leq d_2 < 1 \text{ для } z \in \overline{D}_{\mu|\zeta|},$$

где $d_2 = (1 + d_1)/2$. Таким образом, для $d = \max\{d_2, q/(q+h)\}$ мы получим

$$|Q(\zeta, z)| \leq d^{n_k} \text{ для } \zeta \in \gamma_k, z \in S_h \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}. \tag{2.32}$$

Оценка (2.32) выполняется также для $\zeta \in \Gamma \backslash \gamma_k$ и $|z| = \mu\rho_k$, $k = 1, 2, \cdots$, где ρ_k -расстояние γ_k от точки 0. В самом деле, если $|\zeta| > q_k$, то мы приходим к предыдущему случаю, когда $|z| \leq \mu|\zeta|$.

Теперь определим последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ из условия

$$0 \leq n_k - c_4 \left[A + \log^+ M\left(q_k, F\right)\right] < 1,\ k = 1, 2, \cdots, \tag{2.33}$$

где $c_4 = (\log(1/d))^{-1}$ и константа $A > 0$ выберем так, что

$$|F(\zeta)\, Q(\zeta, z)| \leq e^{-A}, \tag{2.34}$$

если: a) $\zeta \in \Gamma$ и $z \in S_h \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}$ и b) $\zeta \in \Gamma \backslash \rho_k$, $|z| = \mu\rho_k$ для $k \in \mathbb{N}$.

Введем для $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ следующий не собственный интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{2.35}$$

который локально-равномерно сходится на $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, поэтому $I \in H(\mathbb{C}\backslash\Gamma)$, и определим функцию

$$F_0(z) = \begin{cases} F(z) \text{ для } z \in \Omega_h^{\alpha}, \\ 0 \text{ для } z \in \mathbb{C}\backslash\left(\Omega_h^{\alpha}\right). \end{cases}$$

Аппроксимирующую мероморфную функцию G можно определить для $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ формулой

$$G(z) = F_0(z) - I(z)\,\omega(z). \tag{2.36}$$

Полюсы G будут расположены на мнимой оси, так как полюсы ω. Убедимся, что G дейсвительно мероморфна на $\mathbb{C}$ с теми же полюсами.

Из (2.35), (2.36) и формулы Коши для F/ω, мы для $z \in D_r\backslash\Gamma_r$, $r \geq h$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{G(z)}{\omega(z)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{1 - Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\backslash\Gamma_r} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \end{aligned}$$

где $L_r = \Omega_h^{\alpha} \cap \partial D_r$. Здесь последние два интеграла допускают голоморфное продолжение на D_r, а первый интеграл-мероморфное с полюсами на $(\zeta') \subset D_r$, с учетом того, что $Q(\zeta, \zeta) \equiv 1$ для $\zeta \in \Gamma$, где (ζ') множество полюсов функции $Q(\zeta, z)$.

Для доказательства (2.28), мы должны оценить $I(z)\,\omega(z)$ на S_h. Из (2.35) с учетом (2.30), (2.31) и (2.34) следует, что

$$|I(z)|\,e^{A}\leq\frac{1}{c_3}\int_{\Gamma}(|\zeta|+|z|)^{-1}\,|\zeta|^{-1/2}\,|d\zeta|\ \text{ для } z\in S_h.$$

Правая часть неравенства ограничен интегралом

$$c_5\int_{2h}^{\infty}(t+|z|)^{-1}t^{-1/2}dt\leq c_6\left(1+|z|^{1/2}\right)^{-1},$$

так что из (2.30), мы получим, что $|I(z)\,\omega(z)|\leq c_7e^{-A}$ для $z\in S_h$. Для (2.28) с $\varepsilon=1$ положим $A=\log^{+}c_7$.

Теперь оценим характеристику $T(r,G)$. Из (2.36) имеем

$$m(r,G)\leq\log^{+}M(r,F)+m(r,I)+m(r,\omega)+1.$$

Поскольку $N(r,G)\leq N(r,G/\omega)+N(r,\omega)$, то из (2.29) мы для $r\geq h$ получим

$$T(r,G)<N(r,G/\omega)+m(r,I)+\log^{+}M(r,F)+c_8\log^{2}(r+1)\,. \tag{2.37}$$

Полюсы G/ω лежат на множестве (ζ'). Учитывая (2.33), мы для $r\geq h$ получим

$$N(r,G/\omega)\leq\sum_{|\zeta'|\leq r}n'\log\frac{r}{|\zeta'|}\leq c_9\sum_{q_k\leq r}n_k\log\frac{r}{q_k}\leq$$
$$\leq c_{10}\sum_{q_k\leq r}\left[1+\log^{+}M(q_k,F)\right]\log\frac{r}{q_k}.$$

Отсюда, поскольку

$$\left[1+\log^{+}M(q_k,F)\right]\log\frac{r}{q_k}\leq\frac{1}{\log q}\int_{q_k}^{qq_k}\left[1+\log^{+}M(t,F)\right]\log\frac{qr}{t}\frac{dt}{t},$$

мы для $r\geq h$ получим

$$N(r,G/\omega)\leq c_{11}\int_{h}^{qr}\left[1+\log^{+}M(t,F)\right]\log\frac{qr}{t}\frac{dt}{t}\leq$$
$$\leq c_{11}\int_{h}^{qr}\int_{h}^{t}\log^{+}M(t,F)\,\frac{d\tau dt}{\tau t}+c_{12}\log^{2}(r+h)\,. \tag{2.38}$$

Оценим теперь $m(r, I)$ для $r = r_k = \mu\rho_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Разобьем интеграл $I(z)$ на сумму интегралов $I_k(z)$ и $J_k(z)$, соответственно, по контурам $\Gamma\backslash\gamma_k$ и γ_k. Если $\zeta \in \Gamma\backslash\gamma_k$ и $|z| = r_k$, то $|\zeta - z| \geq (1-\mu)|\zeta|$, и из (2.31) и (2.34) мы получим

$$|I_k(z)| < \frac{1}{1-\mu}\int_\Gamma |\zeta|^{-3/2}|d\zeta| < e^{c_{13}}, \text{ для } |z| = r_k. \tag{2.39}$$

Если $\zeta \in \Gamma_{\rho_k}$ и $|z| = r_k$, то

$$|Q(\zeta, z)| = \left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right|^{n'} < \lambda^{n'},$$

где $\lambda = \lambda(\alpha) > 1$ и из (2.31), $|\omega(\zeta)| \geq 2h^2$, согласно (2.33) мы будем иметь

$$\left|J_k\left(r_k e^{i\varphi}\right)\right| \leq \exp\{c_{14} + c_{14}\log^+ M(\rho_k, F)\}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\varphi), \tag{2.40}$$

где

$$\alpha_i(\varphi) = \int_{\gamma_k}\left|\zeta - r_k e^{i\varphi}\right|^{-1}|d\zeta|.$$

Полагая

$$c_{15} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\alpha_1(\varphi)\,d\varphi$$

и учитывая, что $\alpha_i(\varphi) \leq b\alpha_1(\varphi)$ для $i = 1, 2, \cdots$, где $b = b(h) > 1$ и $k < c_{16}\log r_k$, из (2.39) и (2.40) получим

$$m(r_k, I) \leq c_{13} + c_{14}\left[1 + \log^+ M(\rho_k, F)\right] + c_{17}\log r_k + 1.$$

Это с (2.37) и (2.38) и $r_1 > h$ дает нам для $k = 1, 2, \cdots$, оценку

$$T(r_k, G) < c_{13}\int_h^{qr_k}\int_h^t \log^+ M(\tau, F)\frac{d\tau dt}{\tau t} +$$
$$+ c_{18}\log^+ M(q_k, F) + c_{18}\log^2(r_k + h).$$

Здесь второе слагаемое оценивается через первое. Так как

$$\int_{q_k}^{qr_k}\log\frac{qr_k}{t}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log^2(\mu q) = c_{19},$$

то

$$\log^+ M\left(q_k, F\right) \leq \frac{1}{c_{19}} \int_{q_k}^{qr_k} \log^+ M\left(\tau, F\right) \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{c_{19}} \int_{q_k}^{qr_k} \int_{q_k}^{t} \log^+ M\left(\tau, F\right) \frac{d\tau dt}{\tau t}.$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$T\left(r_k, G\right) < c_{18} \int_h^{qr_k} \int_h^t \log^+ M\left(\tau, F\right) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{16} \log^2\left(r_k + h\right), \; k \geq 1. \tag{2.41}$$

Пусть теперь $r \geq h$. Поскольку $r_k = qr_{k-1}$ для $k = 2, 3, \cdots$, существует $k \geq 1$ такое, что $r \leq r_k < qr$. Поскольку $T\left(r, G\right) \leq T\left(r_k, G\right)$, то мы из оценки (2.41) окончательно получим

$$T\left(r, G\right) < c_{20} \int_h^{q^2 r} \int_h^t \log^+ M\left(\tau, F\right) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{21} \log^2\left(r + h\right), \text{ для } r \geq r_1.$$

Таким образом учитывая, что $q^2 \leq p$ и $r_1 > h$, мы приходим к оценку (2.29). Теорема полностью доказана. $\square$

Следствие 2.1 *Из теоремы 2.1 и (2.28)-(2.29) следует, что функцию* $F \in A\left(\Omega_h^\alpha\right)$ *порядка* $\rho_F < +\infty$ *можно равномерно приблизить на* S_h *мероморфными функциями* G *с* $T\left(r, G\right) = O\left(r^{\rho_F}\right)$*, при* $r \to +\infty$.

Что касается асимптотической точности оценки (2.29), то оно следует из доказательствы самой теоремы, основанное на оценке (2.27) из Леммы 2.2, а ее асимптотическая точность показан в работе Келдыша [28].

Следующая теорема является аналогом Теоремы 1 работы [21] для полосы. Для ее доказательства нам будет нужна следующая лемма (см. [21], стр. 542).

Лемма 2.3 *Для* $q \in B$ *и* $\beta \in (0, \pi/2)$ *существует* φ *мероморфная функция, такая, что*

$$q\left(|z|\right) < \left|\varphi\left(z\right)\right| < b_1 q\left(|z|\right) \text{ для } z \in S_{3h} \cup \Delta_\beta \cup \Delta_\beta\left(\pi\right), \tag{2.42}$$

$$T\left(r, \varphi\right) < b_2 \left(1 + \log^+ q\left(r\right)\right) \log^2\left(r + 1\right) \text{ для } r \geq h, \tag{2.43}$$

где $b_1 = b_1\left(\beta, q, h\right) > 0$ *и* $b_2 = b_2\left(\beta, q, h\right) > 0$.

Следующая теорема является одним из основных результатов этой главы.

Теорема 2.2 *Если $f \in A''(S_h)$, $q \in B$,$q \geq 1$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1$, то существует мероморфная функция g такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{q(|z|)} \text{ для } z \in S_h, \tag{2.44}$$

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} +$$
$$+ k\left[1 + \log q(r)\right] \log^3(pr) \text{ для } r \geq h, \tag{2.45}$$

где a_r для $r > 0 > 0$ определен в (2.3) с $\varphi \equiv 1$ и $\varepsilon = 1$; $k = k(p, q, h) > 0$.

Доказательство. Выберем число $l = l(p) > 0$ так, что $l < \min\{p, 2\}$, и пусть $\alpha := 2\arctan(l-1)$. Пусть φ -мероморфная функция из Леммы 2.3. Очевидно мы можем выбрать $\beta = \beta(\alpha)$ так, что $\Omega_h^\alpha \subset S_{3h} \cup \Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi)$. Из Леммы 1 следует, что существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ для $f\varphi$, удовлетворяющая (2.1). Согласно (2.2) и (2.43), рост функции F для $\tau = lr + h$ оценивается неравенством

$$\log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < k_1\left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau) q(\tau)}{\varepsilon}\right]. \tag{2.46}$$

Применим теперь к F Теорему 2.1. Из (2.1) и (2.28), будем иметь

$$|f(z)\varphi(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in S_h, \tag{2.47}$$

а рост функции G для $r \geq h$ согласно (2.2) и (2.46) ограничен неравенством:

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) < k_2 \int_h^{pr} \int_h^t \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau) q(\tau)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + \log^3(pr).$$

Таким образом, окончательно для $r \geq h$ получим оценку

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) < k_3 \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t}$$
$$+ k_3\left[1 + \log q(r)\right] \log^3(pr). \tag{2.48}$$

Искомую мероморфную функцию g мы получим, пологая $g = G/\varphi$. Из (2.28) и (2.42) следует, что возможные полюсы функции g должны лежать на $\Delta_\beta(\pi/2) \cup \Delta_\beta(-\pi/2)$. Неравенство (2.44) следует из (2.47), с учетом (2.42). При этом, поскольку $|\varphi(0)| > q(0) \geq 1$, то

$$\begin{aligned} T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) &\leq T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) + T\left(r, 1/\varphi\right) = T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) + T\left(r, \varphi\right) \\ &- \log|\varphi(0)| < T\left(r, \varepsilon^{-1} G\right) + T\left(r, \varphi\right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценок (2.48) и (2.43) приходим к неравенству (2.45). Теорема доказана. $\square$

Для *равномерного* приближения на полосе из Теоремы 2.2 (при $q \equiv 1$) с учетом информации о расположении полюсов аппроксимирующих функций в Теореме 2.1, то мы получим следующую теорему.

Теорема 2.3 *Пусть $f \in A''(S_h)$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1$. Тогда существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in S_h, \tag{2.49}$$

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon}\right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^3(pr), \tag{2.50}$$

для $r \geq h$, где $k = k(p, h) > 0$.

В работе [19] было показано, что если $f \in A_b''(S_h)$ и f равномерно непрерывна на ∂S_h, то ее можно на полосе S_h равномерно приблизить *целыми* функциями порядка 1 и нормального типа, и этот порядок нельзя уменьшить. Из Теоремы 2.3 мы можем указать новые условия на граничные значения функции f, из которых следует, что f может быть равномерно приближена на S_h *мероморфными* функциями g порядка $\rho \in (0, 1)$.

Определение 2.1 *Скажем, что мероморфная функция g с полюсами на мномой оси принадлежит к классу M^{ρ}, если g ограничена на S_h и*

$$T(r,g) = O(r^{\rho}) \text{ при } r \to \infty.$$

Теорема 2.4 *Пусть $\nu(r) = r^{\rho}$ для $r \geq 0$ и продолжим ν определен на $\mathbb{R}$ так, что $\nu(r) = -\nu(-r)$; положим $\mu(z) = \mu_0(x) + iy$ для $z = x + iy \in S_h$, где $\mu_0 = \nu^{-1}$ на $\mathbb{R}$. Если $f \in A_b''(S_h)$, $(f \circ \mu)'$ и $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h, то функцию f можно равномерно приблизить на S_h функциями из класса M^{ρ}.*

Доказательство. По Теореме 2.3, для любого $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, удовлетворяющая (2.22) и (2.23). Из условии теоремы следует, что $\left|(f \circ \mu)'\right| \leq M$ и $\left|(f \circ \mu)''\right| \leq M$ на ∂S_h.

Учитывая, что $\mu'(r) = 1/\nu'(r)$, получим $|z f_{\partial}'(z)| \leq M|z|^{\rho}$. Из определения μ следует, что $|f'(z)\mu''(z)| \leq M_0$, откуда получим, что $|z^2 f''(z)| \leq M_1|z|^{\rho}$. Таким образом из определения a_{τ} для $\varphi \equiv 1$ и из (2.50) мы получим, что $T(r,g) = O(r^{\rho})$ при $r \to \infty$. $\Box$

В случае вещественной осы анологичная теорема была обратимой, но здесь часть необходимости теоремы имеет несколько другой вид. Для ее доказательства нам понадибатся следующие леммы, доказанные в [21].

Лемма 2.4 *Пусть меромoрная функция g не имеет полюсов в $\Delta_{\alpha}(\theta)$ для $\alpha, \theta \in (0, 2\pi)$. Тогда для произвоилных чисел $p > 1$ и $\beta \in (0, \alpha)$ имеем оценку*

$$\log^{+}|g(z)| < cT(p|z|, g) \text{ для } z \in \Delta_{\alpha-\beta}(\theta), \tag{2.51}$$

где константа $c > 0$ зависит лишь от β и p.

Лемма 2.5 *Пусть $g \in H(D_R)$, $|g(\zeta)| \leq M$ для $\zeta \in D_R$ и $|g(t)| \leq 1$ для $-R < t < R$. Тогда*

$$|g'(0)| < \frac{6}{R}\left(1 + \log^{+} M\right). \tag{2.52}$$

Леммы 2.4 и 2.5 позволяют нам доказать следующий аналог Леммы 5 работы [21] для функций класса M^ρ.

Лемма 2.6 *Пусть $g \in M^\rho$, $\rho \in (0,1)$. Тогда для $z \in \partial S_h$*

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{|g'(z)|}{\nu'(|z|)} < +\infty. \tag{2.53}$$

Доказательство. Пусть функция $g \in M^\rho$ не имеет полюсов в $\Delta_\alpha \cup \Delta_\alpha(\pi)$ для $\alpha \in (0,\pi)$. Применим к g и к углам Δ_α и $\Delta_\alpha(\pi)$ Лемму 2.4 при $p=2$. Из оценки (2.51) с учетом того, что $g \in M^\rho$, получим

$$\log|g(z)| < c_1\nu(|z|) \text{ для } z \in \Delta_\alpha \cup \Delta_\alpha(\pi). \tag{2.54}$$

Выберем произвольную точку $z \in \partial S_h$ и рассмотрим голоморфную функцию g_z : $g_z(\zeta) = g(z+\zeta)$ для $\zeta \in D_R$, где $R = |z|$.

Из (2.54) следует, что

$$|g_z(\zeta)| \le M = \exp\{c_1\nu(2|z|)\} \text{ для } \zeta \in D_R.$$

Пременив к g_z Лемму 2.5, мы из оценки (2.52) получим

$$|g'(z)| \le \frac{6}{|z|}(1 + c_1\nu(2|z|)) < c_2\frac{\nu(|z|)}{|z|} < c_3\nu'(|z|),$$

что доказывает оценку (2.53). □

Следующая теорема обращает Теорему 2.4; то есть указывает необходимые услови на приближаемую функцию f, при которых возможно равномерное приближение функции f на S_h мероморфными функциями данного роста.

Теорема 2.5 *Если $f \in A_b(S_h)$ и функция f допускает равномерное приближение на S_h функциями из класса M^ρ, то композиция $f \circ \mu$ должна быть равномерно непрерывной на ∂S_h.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует последовательность функций $\{g_n\}_1^\infty$, $g_n \in M^\rho$ такая, что $g_n \to f$ равномерно на полосе S_h, при $n \to \infty$. Тогда $g_n \circ \mu \to f \circ \mu$ также равномерно на S_h. Если мы докажем, что $(g_n \circ \mu)'$ ограничена на ∂S_h, то $(f \circ \mu)'$ также будет ограничена на ∂S_h. Из оценки (2.53) следует, что для $z \in \partial S_h$

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \left|(g \circ \mu)'(z)\right| = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \left|\mu'(z)\, g'(\mu(z))\right| = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{|g'(\mu(z))|}{\nu'(|\mu(z)|)} < \infty.$$

Отсюда следует, что функция $f \circ \mu$ равномерно непрерывна на ∂S_h. Теорема полностью доказана. $\square$

2.3 Аппроксимация на Δ_α функциями из класса $A(\Delta_\beta)$

В первой главе, для целой аппроксимации, мы функцию $f \in A''(\Delta_\alpha)$ сначала приблизили функциями из класса $A(\Delta_\alpha^\tau)$. Для мероморфного приближения эта схема не подходит, поэтому нам понадибаеться следующий аналог Леммы 2.1 для угла.

Лемма 2.7 *Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$, $\alpha < \beta < \min\{\alpha + \pi/2, \pi + \alpha/2\}$, $\varphi \in A(\Delta_\beta)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $F \in A(\Delta_\beta)$ такая, что*

$$|f(z)\,\varphi(z) - F(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha, \tag{2.55}$$

а рост функции F удовлетворяет на Δ_β неравенству

$$M_F(r) < 3M_f(lr)\, M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\left\{1 + c\varepsilon^{-1}\lambda(3lr, f, \varphi) + 3\ln^+(lr)\right\} \text{ для } r > 0, \tag{2.56}$$

где

$$\lambda(r, f, \varphi) = \max_{|\zeta|\le r} \{(|\zeta|+1)\,|f'_\partial(\zeta)| + (|\zeta|+1)\,|f''_\partial(\zeta)|\}\, M_\varphi(r), \tag{2.57}$$

$l = 1 + \tan((\beta - \alpha)/2) > 1$ и $c = c(\alpha, \beta) > 0$ -константа, зависящая лишь от α и β.

Доказательство. Мы докажем Лемму 2.7 исползуя метод, развитый для доказательства Леммы 2.1. Заменая f на $\varepsilon^{-1} f$ и F на $\varepsilon^{-1} F$, мы можем привести доказательство леммы к случаю $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим C^1-продолжение f_* функции f на Δ_β, пологая $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in \Delta_\alpha$ и

$$f_*(\zeta) := if(u+v) + (1-i)f(u) \tag{2.58}$$

где $v = dist(\zeta, \gamma_\alpha) \geq 0$ и u является проекцией ζ на γ_α для $\zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o$. Из (2.58) следует, что f_* на Δ_β удовлетворяет неравенству

$$M_{f_*}(r, \Delta_\beta) \leq 3M_{f'}(lr, \Delta_\alpha). \tag{2.59}$$

Из условий Коши-Римана $\overline{\partial} f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in \Delta_\alpha$ и из (1.2) и (2.58) следует, что

$$\left|\overline{\partial} f_*(\zeta)\right| < 2dM_{f''}(l|\zeta|, \gamma_\alpha) \tag{2.60}$$

для $\zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o$, где $d = dist(\zeta, \gamma_\alpha) \geq 0$.

Пусть $\zeta \to n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \gamma_\beta$ будет кусочно постоянной функцией; мы фиксируем $n(|\zeta|)$ по условию

$$0 < n(|\zeta|) - \{(|\zeta|+1)\left|f'_\partial(\zeta)\right| + (|\zeta|+1)\left|f''_\partial(\zeta)\right|\}|\varphi(\zeta)| \leq 1 \text{ для } \zeta \in \gamma_\beta. \tag{2.61}$$

Чтобы построить аппроксимирующию функцию F, мы должны реализовать для любого фиксированного полюса $\zeta \in E := \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o$ конструктивную аппроксимацию ядры Коши $C_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$ для $z \in \Delta_\alpha$ функциями, голоморфными от z и ограниченных в E. При этом, аппроксимация $C_\zeta(z)$ необходимо реализовать не только для $z \in \Delta_\alpha$, но и для любого компактного подмножесыва E, если $|\zeta|$ достаточно велик. Очевидно, что аппроксимация данного вида эквивалентна аппроксимации нулевой функции функциями, голоморфными на E, которые равны 1 в точке $\zeta \in E$. Определим функции $Q(\zeta, z)$, с $Q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \Delta_\beta$:

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^{n(|\zeta|)} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^{3\ln^+|\zeta|}, \tag{2.62}$$

где ζ_0 определы так, что $dist(\zeta_0, \gamma_\alpha) = 2dist(\zeta, \gamma_\alpha)$ для $\zeta \in \gamma_\beta$. Очевидно, что $Q(\zeta, z) \in H(\Delta_\beta)$ для фиксированого $\zeta \in E$.

Из теоремы и формулы Коши следует, что

$$\int_{\partial D} Q_\zeta(z)\, C_\zeta(z)\, dz = \begin{cases} -2\pi i, \text{ если } \zeta \in D \\ \quad 0, \text{ если } \zeta \in \Delta_\beta - \overline{D} \end{cases} \tag{2.63}$$

для любой жордановой области $D \subset \Delta_\beta$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей.

Теперь для $r > 0$, пологая $E_r = E \cap \overline{D}_r$ рассмотрим интегралы

$$I_r(z) = \pi^{-1} \int_{E_r} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Delta_{\beta,r}, \tag{2.64}$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = \left(\varphi \overline{\partial} f_*\right)(\zeta)\, Q_\zeta(z)\, C_\zeta(z)$.

Введем новые функции $F_r \in C(\Delta_{\beta,r})$ по формуле

$$F_r(z) = f_*(z) + I_r(z) \text{ для } z \in \Delta_{\beta,r}. \tag{2.65}$$

Из (1.1), (2.64) и теоремы Морера следует, что $F_r(z) \in H\left(\Delta^o_{\beta,r}\right)$, так что очевидно $F_r \in A(\Delta_{\beta,r})$ для любого $r > 0$.

Докажем, что $I_r(z)$ при $r \to \infty$ локально равномерно сходится на Δ_β к следующему несобственному интегралу

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_E G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Delta_\beta. \tag{2.66}$$

Тогда по (2.65), искомую функцию $F \in A(\Delta_\beta)$ можно определить формулой

$$F(z) := f_*(z) + I_\infty(z) \text{ для } z \in \Delta_\beta. \tag{2.67}$$

Из определения (2.67) следует, что

$$\|f\varphi - F\|_{\Delta_\alpha} = \|I_\infty\|_{\Delta_\alpha} \tag{2.68}$$

и

$$|F(z)| \le |f_*(z)\, \varphi(z)| + |I_\infty(z)| \text{ для } z \in \Delta_\beta, \tag{2.69}$$

так что приближение функции f на Δ_α функциями $F \in A(\Delta_\beta)$ и оценка роста F на Δ_β сводится в этой схеме к оценке интеграла I_∞.

Докажем локально равномерную сходимость интегралов $I_r(z)$ для $z \in \Delta_\beta$, при $r \to \infty$. Из (2.64) для $z \in \Delta_\beta$ и $\zeta \in E$ имеем

$$|G_\zeta(z)| \le |q(\zeta, z)| \frac{\left|\varphi \overline{\partial} f_*(\zeta)\right|}{|\zeta - z|} \left(\frac{2u \tan\delta - v}{2u \tan\delta}\right)^{n(lu)}, \tag{2.70}$$

где $\delta = (\beta - \alpha)/2$.

Пусть $K \subset \Delta_\beta$ - компактное множество. Тогда существует $r_0 > 1$ такая, что $K \subset \overline{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < e|z - \zeta_0|$. Имеем, что

$$\int_0^{u\tan\delta} \left(\frac{2u\tan\delta - v}{2u\tan\delta}\right)^{n(lu)} dv < \frac{u\tan\delta}{n(lu)+1} \tag{2.71}$$

и учитывая, что

$$\left|\varphi \overline{\partial} f_*(\zeta)\right| \le c_1 v n(lu)/u \text{ для } \zeta \in E, \tag{2.72}$$

где $c_i = c_i(\alpha, \beta) > 0$ для $i = 1, 2, \cdots$, получим

$$|I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \le c_2 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} u e^{-3\ln(lu)} du < c_2 \left(\frac{1}{r'-r_0} - \frac{1}{r''-r_0}\right) \to 0,$$

равномерно для $z \in K$, при $r'', r' \to \infty$. Это доказывает абсолютную и локально равномерную сходимость $I_\infty(z)$ для $z \in \Delta_\beta$ и что $I_\infty \in A(\Delta_\beta)$.

Для доказательства (2.55), мы должны с помощью (2.70) оценивать $|I_\infty(z)|$ для $z \in \Delta_\alpha$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi}\int_{B(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{E\setminus B(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta = J_1(z) + J_2(z), \tag{2.73}$$

где $B(z) := \{\zeta \in E : |\zeta - z| \le 2|z|\tan\delta\}$. Для $\zeta \in E\setminus B(z)$ следует, что $|\zeta - \zeta_0| \le q|z - \zeta_0|$, где $q = q(\delta) > 0$. Из (2.70)-(2.72) следует, что

$$|J_2(z)| < \int_1^\infty u q^{-3\ln(lu)} du < c_3. \tag{2.74}$$

Пусть $z_0 \in \gamma_\alpha$ так, что $dist(z, z_0) = dist(z, \gamma_\alpha) \ge 0$. Пологая

$$C(z) = \{[z_0 - 1, z_0 + 1] \times \mathbb{R}\} \cap B(z),$$

по (2.71)-(2.72) будем иметь:

$$\int_{C(z)} |G_\zeta(z)|\, d\sigma_\zeta < c_2 \int_{|z_0|-1}^{|z_0|+1} du = 2c_2. \tag{2.75}$$

Учитывая, что $|\zeta - z| \le |u - |z_0||$ для $\zeta \in B(z)/C(z)$, получим

$$\int_{B(z)\setminus C(z)} |G_\zeta(z)|\, d\sigma_\zeta < \int_{a|z|}^{b|z|} \frac{1}{|u-|z_0||+1} du < c_3, \tag{2.76}$$

где $a > 0$ и $b > 0$ константы, зависящие лишь от δ. Таким образом, учитывая (2.74)-(2.76), из (2.73) мы получим оценку (2.55).

Пусть теперь $z \in \Delta_\beta$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta + \int_{E\setminus D(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta = J_3(z) + J_4(z), \tag{2.77}$$

где

$$D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \le 3|z| \tan\delta\}.$$

Второй интеграл оценивается как в (2.74).

Учитывая, что $ne^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_4 \sqrt{mesD(z)},$$

мы из определения (2.62), с учетом оценки $|\varphi\overline{\partial} f_*(\zeta)| < k_1 n(|\zeta|)/|\zeta|$ и $|\zeta| > (\tan\delta)|z|$, получим

$$J_3(z) < \exp\{k_2 n(3l|z|) + 3\log(|z|+1)\}, \tag{2.78}$$

где $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ постоянные зависящие лишь от δ.

Таким образом с учетом (2.59) и (2.67) мы из (2.77)-(2.78) приходим к оценке (2.56). Лемма полностью доказана. □

2.4 Мероморфное приближение на угловой области

В этом разделе диссертации рассматривается вопрос о конструировании мероморфных функций, которые равномерно или касательно (с заданной скоростей) аппроксимировали бы заданную на угловой области функцию и имели бы, в известном смысле, возможный медленный рост на комплексной плоскости. Этот рост оценивается в терминах их неванлинновской характеристики и зависит от роста аппроксимируемой функции на угле и от ее дифференциальных свойств на границе угла. От аппроксимируем ой функцией требуем, чтобы она была голоморфна внутри данного угла и равномерно непрерывна на ее границе.

Процесс оптимального равномерного приближения на угле Δ_α мероморфными функциями реализуется двумя шагами, первой из которых является Лемма 2.7. Второй шаг -это приближение функции $F \in A(\Delta_\beta)$ для $\beta > \alpha$ на Δ_α мероморфными функциями с оптимальной оценкой их роста.

Если $F \in A(\Delta_\beta)$, то задача ее приближения на угле Δ_α $(\beta > \alpha)$ мероморфными функциями имеющими оптимальный рост в $\mathbb{C}$ решена в [24], но здесь мы при таком росте рассматриваем также вопрос о расположение полюсов аппроксимирующих функций на $\mathbb{C}$.

Теорема 2.6 *Пусть* $F \in A\left(\Delta_\beta\right)$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $p > 1$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует мероморфная функция* G *такая, что*

$$\left|F\left(z\right) - G\left(z\right)\right| < \varepsilon \ \text{для} \ z \in \Delta_\alpha \ \text{и} \ |z| \geq p \tag{2.79}$$

и рост G *удовлетворяет неравенству*

$$T\left(r, \varepsilon^{-1}G\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \log^+ \frac{M\left(\tau, f\right)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2\left(r+1\right) \ \text{для} \ r \geq p, \tag{2.80}$$

где $k > 0$ *константа зависит лишь от* α, β *и* p. *При этом, возможные полюсы аппроксимирующих функций* G *лежат на мнимой осы для* $\beta < \pi$ *и на отрицательной части вещественной осы для* $\beta \geq \pi$.

Доказательство. Далее используется схема доказательства Теоремы 2.1. По Лемме 2.2, для $\omega\left(z\right) = \omega_\delta\left(iz\right)$ с $\delta = 1$ имеем

$$\left|\omega\left(\zeta\right)\right| \geq |\zeta|^{1/2} \ \text{для} \ \zeta \in \Gamma \ \text{и} \ \left|\omega\left(z\right)\right| < k_1 + k_2 \left|z\right|^{1/2} \ \text{для} \ z \in \Delta_\alpha, \tag{2.81}$$

где $\Gamma = (\gamma_\beta \setminus D_1) \cup (\partial D_1 \cap \Delta_\alpha)$.

Здесь и в далнейшем через $k_j > 0,\ j = 1, 2, \cdots$ обозначаются положительные константы, зависящие лишь от α и β. Из условия $\beta > \alpha$ следует существование константы $k_3 \in (0, 1)$, такой что

$$|\zeta - z| > k_3 \left(|\zeta| + |z|\right) \ \text{для} \ \zeta \in \Gamma \ \text{и} \ z \in \Delta_\alpha. \tag{2.82}$$

Рассмотрим рациональную по z и кусочно-аналитическую по $\zeta \in \Gamma$ функцию

$$Q\left(\zeta, z\right) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right)^{n'}, \tag{2.83}$$

где выбор полюсов ζ' и их кратностей n', кусочно-постоянных по ζ осуществляется внизу. Фиксируем число $q = \min\{\sqrt{p}, \cos^2\delta\left(\beta\right) / \cos^2\delta\left(\alpha\right)\} > 1$, где $\delta\left(\alpha\right) = \left(\pi/2 - \alpha/2\right)$ для $\alpha < \pi$ и $\delta\left(\alpha\right) = \left(\pi - \alpha/2\right)$ для $\alpha \geq \pi$ и рассмотрим последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим $\gamma_k = \{\zeta \in \gamma_\beta : q^{k-1} < |\zeta| \leq q^k\}$, $\gamma^+ = \{\zeta \in \gamma_\beta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и $\gamma^- = \{\zeta \in \gamma_\beta : \operatorname{Im}\zeta < 0\}$ для $k \geq 1$.

Для случаи $\alpha < \beta < \pi$ определим множество полюсов аппроксимирующих функций (ζ') полагая $\zeta' = iq^k / \cos\left(\pi/2 - \beta/2\right)$ для $\zeta \in \gamma_k^+$ и $\zeta' = -iq^k / \cos\left(\pi/2 - \beta/2\right)$ для $\zeta \in \gamma_k^-$; при $\pi \leq \alpha < \beta$ пологаем $\zeta' = -q^k / \cos\left(\pi - \beta/2\right)$ для $\zeta \in \gamma_k^+$ и $\zeta' = -q^k / \cos\left(\pi - \beta/2\right)$ для $\zeta \in \gamma_k^-$; и $\zeta' = 0$ если $\zeta \in \gamma_0 = \Gamma \cap \partial D_1$ для обеих случаев.

Полагая $q_k = q^k/\delta(\beta)$, для $z \in \Delta_\alpha \setminus D_p$ и $\zeta \in \Gamma$ получим

$$\left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right| \leq \frac{\sqrt{q^2 \sin^2\delta\left(\beta\right) + \left(q - 1\right)^2 \cos^2\delta\left(\beta\right)}}{q \sin\delta\left(\alpha\right)} = d_1 < 1. \tag{2.84}$$

Из определения полюсов следует, что для фиксированого $d \in (d_1, 1)$ существует константа $\mu = \mu\left(\alpha, \beta\right) \in (0, 1)$ такая, что $\mu \neq q^{-m}$ для $m \in \mathbb{N}$ и

$$\left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right| \leq d \tag{2.85}$$

для $\zeta \in \Gamma$ и $z \in \overline{D}_{\mu|\zeta|}$. Очевидно, что (2.85) выполняеться еще и для $\zeta \in \Gamma \setminus \Gamma_r$ и $|z| = \mu q_k$, где $\Gamma_r = \Gamma \cap D_r$ для $r > 1$.

Таким образом из (2.83)-(2.85) имеем

$$|Q(\zeta,z)| \leq d^{n_k},\ k=1,2,\cdots. \tag{2.86}$$

Последовательность n_k определим для $\zeta \in \gamma_k$ из условий

$$0 \leq n_k - c_4\left[A + \log^+ M(q_k,F)\right] < 1,\ k=0,1,2,\cdots, \tag{2.87}$$

где $k_4 = (-\log d)^{-1}$ и $A>0$ пока произвольная константа. Из (2.87) имеем:

$$|F(\zeta)\,Q(\zeta,z)| \leq e^{-A} \tag{2.88}$$

для $\zeta \in \Gamma$ и $z \in \Delta_\alpha \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}$ и $\zeta \in \Gamma\backslash\Gamma_r$ и $|z| = \mu q_k$.

Рассмотрим для $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ несобственный интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{Q(\zeta,z)}{\zeta - z}d\zeta \text{ для } z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma. \tag{2.89}$$

Из (2.81) и (2.88) следует, что подынтегральная функция при $|\zeta| \geq \mu^{-1}|z|$ мажорируется интегрируемой функций $k_5|\zeta|^{-3/2}$. Поэтому интеграл $I(z)$ сходится в $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ локально-равномерно и представляет голоморфную функцию.

Полагая теперь $F_0(z) = F(z)$ для $z \in \Delta_\beta$ и $F_0(z) = 0$ для $z \in \mathbb{C}\backslash\Delta_\beta$, покажем, что при подходящем выборе константы A требуемую мероморфную функцию G можно определить формулой

$$G(z) := F_0(z) - I(z)\,\omega(z) \text{ для } z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma. \tag{2.90}$$

Эта формула определяет G как мероморфную вне Γ функцию с возможными полюсами на множестве (ζ') и в точках, где лежат полюсы функции ω. Покажем, что G допускает голоморфное продолжение и на Γ. В самом деле, учитывая (2.89), (2.90) и формулу Коши для функции F/ω приминительно к контуру $\partial(\Delta_\beta \cap \overline{D}_r)$, мы для $z \in \overline{D}_r\backslash\Gamma_r$ при любом $r \geq 1$ получим представление

$$\begin{aligned}\frac{G(z)}{\omega(z)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{1-Q(\zeta,z)}{\zeta - z}d\zeta + \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\backslash\Gamma_r} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{Q(\zeta,z)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{l_r} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z},\end{aligned}$$

где $l_r = \Delta_\beta \cap \partial \overline{D}_r$. Здесь последние два интеграла допускают голоморфное продолжение на $\overline{D}_r$, а первый интеграл-мероморфное.

Из (2.89), с учетом (2.81)-(2.82) и (2.88) следует, что

$$|I(z)|\, e^A \leq \frac{1}{k_3} \int_\Gamma \frac{1}{|\zeta| + |z|} \frac{|d\zeta|}{\sqrt{|\zeta|}} \text{ для } z \in \Delta_\alpha \setminus D_p.$$

Здесь часть интеграла по γ_0 равна $k_5(1+|z|)^{-1}$, а остальная часть ограничена интегралом

$$2\int_1^\infty \left(t + |z|^{-1}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq k_6 \left(1 + \sqrt{|z|}\right)^{-1},$$

поэтому с учетом (2.81) для $z \in \Delta_\alpha \setminus D_p$ получаем, что функция $I(z)\omega(z)$ ограничена величиной $k_7 e^{-A}$. Для выполнения оценки (2.79) достаточно фиксировать $A = \log^+ k_7$.

Перейдем теперь к оценке характеристики $T(r, G)$. Из (2.90) следует, что

$$m(r, G) \leq \log^+ M(r, F) + m(r, I) + m(r, \omega) + 1.$$

Поскольку

$$N(r, G) \leq N(r, G/\omega) + N(r, \omega),$$

то с учетом (2.90) получим

$$T(r, G) \leq N(r, G/\omega) + m(r, I) + \log^+ M(r, F) + k_8 \log^2 (r+1) \text{ для } r \geq p. \tag{2.91}$$

Полюсы функции G/ω расположены на множестве (ζ'), имея в точке ζ' кратность не выше n', поэтому с учетом (2.87) для $r \geq p$: получим

$$\begin{aligned} N(r, G/\omega) &\leq \sum_{|\zeta'| \leq r} n' \log \frac{r}{|\zeta'|} \leq k_9 \sum_{q_k \leq r} n_k \log \frac{r}{q_k} \leq \\ &\leq k_{10} \sum_{q_k \leq r} \left[1 + \log^+ M(q_k, F)\right] \log \frac{r}{q_k}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\left[1 + \log^+ M(q_k, F)\right] \log \frac{r}{q_k} \leq \frac{1}{\log q} \int_{q_k}^{q q_k} \left[1 + \log^+ M(t, F)\right] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t},$$

находим, что для $r \geq p$

$$
\begin{aligned}
N(r, G/\omega) \leq & \quad k_{11} \int_1^{qr} \left[1 + \log^+ M(t, F)\right] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t} \leq \\
\leq & \quad k_{11} \int_1^{qr} \int_1^t \log^+ M(t, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_{12} \log^2 (r+1) . \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

Величину $m(r, I)$ нам достаточно оценить при $r = r_k = \mu q_k$, $k = 1, 2, \cdots$. С этой целью разобьием интеграл $I(z)$ на сумму интегралов $I_k(z)$ и $J_k(z)$ соответственно по контурам $\Gamma \backslash \Gamma_r$ и Γ_r. Если $\zeta \in \Gamma \backslash \Gamma_r$ и $|z| = r_k$, то $|\zeta - z| \geq (1-\mu)|\zeta|$, и из оценки (2.82) и (2.88) получим

$$
|I_k(z)| < \frac{1}{1-\mu} \int_\Gamma |\zeta|^{-3/2} |d\zeta| < e^{k_{13}}, \text{ для } |z| = r_k. \qquad (2.93)
$$

Если же $\zeta \in \Gamma_r$ и $|z| = r_k$, то тогда

$$
|Q(\zeta, z)| < b^{n'},
$$

где $b = b(\beta - \alpha, p) > 1$ и из (2.82), $|\omega(\zeta)| \geq 1$, с учетом (2.87), имеем:

$$
\left|J_k\left(r_k e^{i\varphi}\right)\right| \leq \exp\{k_{14} + k_{14} \log^+ M(q_k, F)\} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\varphi), \qquad (2.94)
$$

где

$$
\alpha_i(\varphi) = \int_{\gamma i} \left|\zeta - r_k e^{i\varphi}\right|^{-1} |d\zeta| .
$$

Заменяя в этом интеграле ζ на $q_{k-1}\zeta$ при $k > 1$ и учитывая, что $r_k = q_{k-1} r_1$, мы найдем, что $\alpha_k(\varphi) = \alpha_1(\varphi)$ для $= 1, 2, \cdots$. Кроме того, $\alpha_1(\varphi)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением конечного числа точек $\varphi = \varphi'$, где она возрастает, как $|\varphi - \varphi'|^{-1}$. Полагая поэтому

$$
k_{15} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \alpha_1(\varphi) d\varphi
$$

и учитывая, что $k = k_{16} \log r$, мы из (2.90) и (2.91) получаем

$$
m(r_k, I) \leq k_{13} + k_{14} \left[1 + \log^+ M(\rho_k, F)\right] + k_{15} \log r + 1.
$$

Сопоставляя эту оценку с (2.88) и (2.92), и учитывая, что $r_1 \geq 1$, получим

$$
\begin{aligned}
T(r_k, G) \quad < \quad & k_{13} \int_1^{qr_k} \int_1^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + \\
& + k_{17} \log^+ M(q_k, F) + k_{17} \log^2 (r_k + 1) .
\end{aligned}
$$

Здесь второе слагаемое оценивается через первое. Так как

$$\int_{q_k}^{qr_k} \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log^2 (\mu q) = k_{18},$$

то ясно, что

$$\begin{aligned} \log^+ M (q_k, F) &\leq \frac{1}{k_{18}} \int_{q_k}^{qr_k} \log^+ M (\tau, F) \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{k_{18}} \int_{q_k}^{qr_k} \int_{q_k}^{t} \log^+ M (\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$T (r_k, G) < k_{18} \int_1^{qr_k} \int_1^t \log^+ M (\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_{17} \log^2 (r_k + 1), \; k \geq 1. \tag{2.95}$$

Пусть теперь $r \geq 1$. Так как $r_k = qr_{k-1}$ для $k = 2, 3, \cdots$, то существует такое $k \geq 1$, что $r \leq r_k < qr$. Поскольку $T (r, G) \leq T (r_k, G)$, то из оценки (2.95) окончательно получим

$$T (r, G) < k_{19} \int_1^{q^2 r} \int_1^t \log^+ M (\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_{20} \log^2 (r + 1), \text{ для } r \geq r_1.$$

Теперь учитывая, что $q^2 \leq p$ и $r_1 \geq 1$, мы приходим к оценке (2.80). Таким образом Теорема 2.6 доказана. □

Что касается точности оценки (2.80), то заметим, во-первых, что рост функции G, с учетом (2.79), не может быть ниже роста функции F на Δ_α. Поэтому оценка (2.80) асимптотически точна по r, во всяком случае, для функций F, имеющих регулярный рост конечного порядка. Если же функция F ограничена, то в работе [24] приведен пример, иллюстрирующий точность оценки (2.80) без учета величины константы k.

Следствие 2.2 *Из Теоремы 2.6 и (2.79)-(2.80) следует, что функция $F \in A (\Delta_\beta)$ порядка $0 < \rho_F < +\infty$ можно равномерно приблизить на Δ_α мероморфными функциями G с полюсами на мнимой осы для $\alpha < \beta < \pi$ и на левой части вещественной осы для $\pi \leq \alpha < \beta$ с оценкой роста G*

$$T (r, G) = O (r^{\rho_F}), \text{ при } r \to +\infty.$$

В первой главе мы рассматривали вопрос о наилучшем равномерном приближении функции $f \in A''(\Delta_\alpha)$ целыми функциями на Δ_α. Там функцию f можно было аппроксимировать целыми функциями порядка $\pi/(2\pi-\alpha)$, при некоторых дополнительных условиях на граничные значения функции f, и по теореме Фрагмена-Линделефа этот порядок нельзя было уменшить. Здесь рассматривается аналогичная задача аппроксимации мероморфными функциями. Оказывается, что порядок аппроксимирующих функций можно уменшить. Сначала докажем следующую общую теорему.

Теорема 2.7 *Пусть $f \in A''(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in A(\Delta_\beta)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная функция g такая, что*

$$|f(z)\varphi(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p \tag{2.96}$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{\log^+ \frac{M(\tau, f)\, M(\tau, \varphi)}{\varepsilon} + \frac{\lambda(3\tau, f, \varphi)\, M(\tau, \varphi)}{\varepsilon}\right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} + \\ + k \log^3(r+1) \tag{2.97}$$

для $r \geq p$, где $k = k(\alpha, p) > 0$. При этом, возможные полюсы аппроксимирующих функций лежат на мнимой осы для $\alpha < \pi$ и на $\mathbb{R}_-$ для $\alpha \geq \pi$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из Леммы 2.7 и из Теоремы 2.5. Фиксируем $\beta > \alpha$ такую, что $\tan(\beta/2 - \alpha/2) < p - 1$. Из (2.56) имеем, что

$$\ln^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < k \ln^+ \frac{M_f(pr)}{\varepsilon} + k \frac{\lambda(3pr, f)}{\varepsilon} + k \ln(pr), \tag{2.98}$$

где $k = k(\alpha, p) > 3$.

Таким образом из (2.55) и (2.79) приходим к оценке (2.96), а из (2.56)-(2.57), (2.80) и (2.98) получим оценку (2.97). □

Замечание 2.1 *Если в Теореме 2.7 предположить, что $f \in A''\left(\Delta_\alpha \cup \overline{D}_p\right)$, то оценка (2.96) будет выполняться для всех $z \in \Delta_\alpha$.*

Из Теоремы 2.7 при $\varphi \equiv 1$, мы получим равномерную аппроксимацию функции $f \in A''(\Delta_\alpha)$ на Δ_α мероморфными функциями.

Теорема 2.8 *Пусть* $f \in A''(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p > 1$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует мероморфная функция* g *такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{\log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} + \frac{\lambda(3\tau, f)}{\varepsilon}\right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^3(r+1)$$

для $r \geq p$, *где* $k = k(\alpha, p) > 0$ *и* $\lambda(r, f)$ *определен в (1.5) с* $\varphi \equiv 1$. *При этом, возможные полюсы аппроксимирующих функций лежат на мнимой осы для* $\alpha < \pi$ *и на* $\mathbb{R}_-$ *для* $\alpha \geq \pi$.

Следствие 2.3 *Пусть* $f \in A''(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$; *и функции* $zf'_\partial(z)$ *и* $zf''_\partial(z)$ *ограничены на* γ_α. *Тогда функция* f *допускает равномерное приближение на* Δ_α *мероморфными функциями порядка* $\rho_f > 0$.

С помощью Тоеремы 2.7 можно получить более общие и удобные для приложений результаты об асимптотическом или касательном приближении на угле Δ_α мероморфными функциями с оценкой их роста. Здесь рост аппроксимируюших функций будет зависеть и от роста скорости касания к данной функции на бесконечности. Доказательство следующей теоремы основано на Теореме 2.7.

Теорема 2.9 *Пусть* $f \in A''(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\rho(r)$ - *уточненный порядок в смысле Валирона,* $p > 1$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует мероморфная функция* g *такая, что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon |z|^{-\rho(|z|)} \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p, \tag{2.99}$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{\ln^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon} + \rho(\tau) \frac{\lambda(3\tau, f)}{\varepsilon}\right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} + $$

$$+ k\{1 + \rho(r)\} \log^3(r+1), \tag{2.100}$$

для $r > p$, где $k = k(\alpha, \rho, p) > 0$ постоянная, зависящая лишь от α, p и от выбора функции ρ.

Доказательство. Из теоремы 5.1 работы [29] (стр. 99) следует существование голоморфной функции $f_\rho \in H(\Delta_{\alpha+\delta} \cup D_2)$, такой что для $\delta \in (0, 2\pi - \alpha)$

$$2 \le |f_\rho(z)| \, |z|^{-\rho(|z|)} \le k_1, \tag{2.101}$$

где $k_1 > 0$ постоянная, зависящая лишь от α и δ.

Применим к функции f_ρ и к области $\Delta_{\alpha+\delta} \cup D_2$ Теорему 2.7, пологая $\varepsilon = 1$, $p = 2$. Аппроксимирующая мероморфная функция g_ρ будет удовлетворять в силу (2.79) и (2.101) неравенствам

$$1 \le |g_\rho(z)| \, |z|^{-\rho(|z|)} \le 2k_1 \tag{2.102}$$

а согласно (2.102) и (2.80) рост функции g_ρ ограничивается неравенством:

$$\begin{aligned} T(r, g_\rho) &< \int_1^{2r} \int_1^t \rho(\tau) \log \tau \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_2 \log^2(r+1) \le \\ &\le k\rho(2r) \int_1^{2r} \int_1^t \rho(\tau) \log \tau \frac{d\tau dt}{\tau t} + k_2 \log^2(r+1) \le \\ &\le k_3 \rho(r) \log^3(r+1), \ r \ge 1. \end{aligned} \tag{2.103}$$

На последном шагу мы использовали тот факт, что $r^{\rho(r)}$ является медленно растущей функций, если $\rho(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Константа k_3 зависит от выбора функции ρ, от α и δ.

Применим теперь к функции fg_ρ и углу Δ_α Теорему 2.7 . Если g_1-аппроксимирующая функция, то требуемую в Теореме 2.9 мероморфную функцию g мы получим, полагая $g = g_1/g_\rho$. Тогда согласно по (2.96) мы имеем

$$|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{|g_\rho(z)|} \text{ для } z \in \Delta_\alpha, \ |z| \ge p,$$

откуда, с учетом (2.102), получим оценку (2.99). Кроме того

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) \le T\left(r, \varepsilon^{-1} g_1\right) + T(r, g_\rho) + k_4,$$

где $k_4 > 0$ константа зависящая лишь от выбора функции ρ. Оценка (2.100) следует из оценок (2.97) и (2.103), если в (2.97) положить $\varphi = g_\rho$. Теорема 2.9 полностью доказана. $\square$

Замечание 2.2 *Расматривая уточненый порядок $\rho(r)$, мы подразумеваем, что $r^{\rho(r)} \uparrow \infty$ при $r \to \infty$. Это условие, которое может нарушаться, когда $\rho(r) \to 0$, продиктовано желанием иметь в (2.99) касательное приближение.*

Непосредственно из Теоремы 2.9 следует, что если $\rho\,(r)$ постоянная функция ($\rho\,(r) \neq 0$), то фунцию f на Δ_α можно приблизить мероморфными функциями g с асимптотикой $r^{1/\rho}$. При этом, если $\rho_f > 0$, то с $T(r, g) = O(r^{\rho_f})$ при $r \to \infty$.

Заключение

Первая глава диссертации посвящена вопросам равномерного приближения на угловой области целыми функциями оценкой их роста. Аппроксимируемая функция голоморфна внутри данного угла и дважды непрерывно дифференцируема на границе угла. Получены новые оценки роста приближающих целых функций, которые улучшают или уточняют ранее известные результаты (Теоремы 1.1 и 1.2).

Во второй главы рассматриваются вопросы равномерного и касательного приближения мероморфными функциями с оптимальной оценкой их роста (предпологая, что приближаемая функция голоморфна внутри полоса (угла) и дважды непрерывно дифференцируема на границе полосы (углы)). Доказаны теоремы о наилучшем равномерном приближении на полосе (угле) мероморфными функциями и с уточнением расположения полюсов приближающих функций на комплексной плоскости (Теоремы 2.3 и 2.8).

Получены также результаты о касательном приближении на полосе (угле) меромофными функциями с оптимальной оценкой роста приближающих функций (Теоремы 2.2 и 2.9).

Литература

[1] Carleman T., *Sur un theoreme de Weierstrass*, Arkiv for Mathematic., Astronomi Och Fisik, 1927, Bd 20, No 4, pp. 1 – 5.

[2] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., *Об одной задаче Карлемана*, ДАН СССР, 1939, т. 23, No 8, стр. 746 – 748.

[3] Келдыш М. В., *О приближениии голоморфных функций целыми функциями*, ДАН СССР, 1945, т. 47, No 4, стр. 243 – 245.

[4] Аракелян Н. У., *Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями*, Изв. АН АрмССР, сер. математика, 1968, т. 3, No 4-5, стр. 273 – 286.

[5] Rot A., *Approximationseigenschaften Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen*, Comment. Math. Helv., 1938, No 11, pp. 77 – 125.

[6] Rot A., *Meromorphe Approximationen*, Comment. Math. Helv., 1973, No 48, pp. 151 – 176.

[7] Rot A., *Uniform and tangential approximations by meromorphic functions on closed sets*, Canad. J. Math., 1976, No 28, pp. 104 – 111.

[8] Нерсисян А. А., *Равномерная и касательная аппроксимация мероморфными функциями*, Изв. АН СССР, сер. матемематика, 1972, т. 7, No 6, стр. 405 – 412.

[9] Мергелян С. Н., *Равномерное приближения функций комплексного переменного*, Успехи матем. наук, 1952, VII, вып. 2(48), стр. 31 – 122.

[10] Аракелян Н. У., *О равномерном приближении целыми функциями на замкнутых множествах*, Изв. АН СССР, сер. математиа, 1964, т. 28, стр. 1187 – 1206.

[11] Kober H., *Approximation by integral functions in the complex plane*, Trans. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 56, pp. 7 – 31.

[12] Бернштейн С. Н., *Об одном свойстве целых функций*, Собрание сочинений, Изд. АН СССР, 1952, Т. 1, стр. 269 – 270.

[13] Бернштейн С. Н., *О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени*, Собрание сочинений, Изд. АН СССР, 1954, Т. 2, стр. 371 – 395.

[14] Bernstein S. N., *Sur la melilleure approximation sur tout l'axe réel des functions continuous par des functions entiéres de degré fini I-V*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR n. Ser. 51(1946), PP. 331 – 334, 487 – 490, 52(1946), pp. 563 – 566, 54(1946), 103 – 108, 475 – 478.

[15] Джрбашян М. М., Тамадян А. П., *О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области*, ДАН СССР, 1955, т. 104, No 3, стр. 345 – 348.

[16] Джрбашян М. М., Тамадян А. П., *О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области*, Изв. АН СССР, сер. математика, 1990, т. 20, No 4, стр. 485 – 512.

[17] Аракелян Н. У., *Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста*, Сиб. Мат. Жур., 1963, т. 4, No 5, стр. 977 – 999.

[18] Аракелян Н. У., *О равномерном и касательном приближении на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста*, Мат. Сборник, 1980, т. 113(155), No 1(9), стр. 3 – 40.

[19] Arakelian N., Shahgholian H., *Uniform and tangential approximation on a stripe by entire functions, having optimal growth*, Computational Methods and Function theory, 2003, vol. 3, No 1, pp. 359 – 381.

[20] Аракелян Н. У., Аветисян Р. А., *О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси*, Докл. АН СССР, 1981, т. 257, No 6, стр. 1289 – 1293.

[21] Аветисян Р. А., Аракелян Н. У., *Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси*, Изв., АН АрмССР, сер. математика, 1990, т. 26, No 6, стр. 534 – 548.

[22] Тер-Исраелян Л. А., *Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста*, Изв., АН АрмССР, сер. математика, 1971, т. 6, No 1, стр. 67 – 80.

[23] Хачатрян Л. Н., *Построение целых функций минимального порядка, убывающих в угле с заданной скороостью*, Изв., АН АрмССР, сер. математика, 1976, т. 6, No 1, стр. 34 – 55.

[24] Аветисян Р. А., Аракелян Н. У., *Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях*, Изв. АН АрмССР, сер. математика, 1988, т. 23, No 6, стр. 546 – 556.

[25] Аветисян Р. А., Аракелян Н. У., Гончар А. А., *Об асимптотическах свойствах мероморфных функций*, Изв. АН АрмССР, сер. математика, 1989, т. 24, No 3, стр. 207 – 225.

[26] Domadaron M., *On the distribution of values of meromorphic functions of slow growth*, Lecture Notes in Math., 599, Compl. Anal. Kentucky, 1976, Springer Verlag, N. Y., 1977, pp. 17 – 21.

[27] Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, Москва, Гостехиздат, 1956.

[28] Келдыш М. В., *О рядах по рациональным дробям*, ДАН СССР, 1954, т. 94, No 3, стр. 377 – 380.

[29] Гольдберг А. А., Островский И. В., *Распределение значений мероморфных функций*, Москва, Наука, 1970.

[30] Алексанян С. А., *Равномерная и касательная аппроксимация на полосе мероморфными функциями, имеющими оптимальный рост*, Изв. НАН Армении, сер. математика, 2008, т. 43, No 6, стр. 6 – 19.

[31] Алексанян С. А., *Равномерное и касательное приближение мероморфными функциями, с оценкой их роста*, Доклады НАН Армении, 2009, т. 109, No 1, стр. 15 – 19.

[32] Aleksanian S. H. and Arakelian N. H., *Optimal uniform approximation on angles by entire functions*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, 2009, vol. 44, No 3, pp. 149 – 164.